

Diplomová práce
VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta strojní
Katedra aplikované mechaniky

Nelineární úlohy konstrukcí
Nonlinear Problems of Structures

Student: Bc. Timotej Naglák
Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Karel Frydrýšek, Ph.D.

Ostrava 2020

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Timotej Naglák**
Studijní program: N2301 Strojní inženýrství
Studijní obor: 3901T003 Aplikovaná mechanika
Téma: **Nelineární úlohy konstrukcí**
Nonlinear Problems of Structures

Jazyk vypracování: čeština

Zásady pro vypracování:

Řešte zadanou úlohu jednoduché rovinné nelineární prutové konstrukce s pružnými a tuhými podporami.

1. Při řešení využijte různé principy řešení a jak analyticko-numerické modely, tak i numerická řešení pomocí MKP.
2. Výše uvedená řešení porovnejte.
3. Navrhněte také jednoduché experimentální řešení výše uvedené konstrukce, které může být využito v laboratořích Katedry aplikované mechaniky FS VŠB-TUO.

Seznam doporučené odborné literatury:

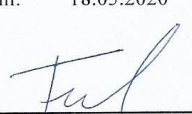
FRYDRÝŠEK, K. Some Selected Tasks of Elasticity and Plasticity 4 (Basic Nonlinear Mechanics of Deformable Bodies in Examples), Department of Applied Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, VSB – Technical University of Ostrava, ISBN 978-80-248-4152-6, pp. 139.
BAŽANT, Z.P., CEDOLIN, L. Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories, Oxford University Press, New York, 1991 (3rd ed., 2010, pp.1011).
DUNAISKI, P., GALISHNIKOVA, V., PAHL, P. J. Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames, ISBN 9781920109486, AFRICAN SUN MeDIA, 2009, pp.382.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.


Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Karel Frydryšek, Ph.D.**

Datum zadání: 20.12.2019

Datum odevzdání: 18.05.2020


doc. Ing. Martin Fusek, Ph.D.
vedoucí katedry





prof. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Místopřísežné prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě 15.5.2020


.....
podpis studenta

Prohlašuji, že

- jsem byl seznámen s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- беру на вѣдомі, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že diplomová práce bude v elektronické podobě uložena v Ústřední knihovně VŠB-TUO k nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že údaje o kvalifikační práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- беру на вѣдомі, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě: 15.5.2020



podpis studenta

Jméno a příjmení autora práce:

Bc. Timotej Naglák

Adresa trvalého pobytu autora práce:

Rychvald, Lípová 524

ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

NAGLÁK, T. *Nelineární úlohy konstrukcí*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky, 2020, 67 s. Vedoucí práce: Doc. Ing. Karel Frydrýšek, Ph.D.

Tato diplomová práce se zabývá problematikou nelinearit v konstrukcích. V úvodu práce je provedeno rozdělení a popis jednotlivých nelinearit. Následně je tato práce zaměřená na geometrické nelinearity a snap-through efekt. V další části jsou uvedeny dva příklady možného uložení von Misesovy příhradové konstrukce a jejich analyticko-numerické řešení podle teorie 1. řádu a 2. řádu. Následně je provedeno řešení pomocí MKP podle teorie velkých deformací a tyto metody jsou dále porovnány. Poslední část této práce je věnována návrhu přípravku pro experiment, jehož cílem bude zjistit závislost posuvů v bodě na působící síle.

Klíčová slova:

Geometrická nelinearita, snap-through, von Misesova příhradová konstrukce, teorie 1. řádu, teorie 2. řádu, MKP, experiment

ANNOTATION OF DIPLOMA THESIS

NAGLÁK, T. *Nonlinear Problems of Structures*. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava. Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics, 2020, 67 pages, thesis head: Doc. Ing. Karel Frydrýšek, Ph.D.

This diploma thesis is focused on the nonlinearities in structures. At the beginning of the thesis the nonlinearities are divided and described. Then, the thesis is focused on geometrical nonlinearities and snap-through effect. The next part is about two examples of setting von Mises's truss structure and their analytical-numerical solution according to the theory of 1st and 2nd order. Then, FEM solution is used according to the theory of large deformations and these methods are compared. In the last part of this thesis there is designed model for experimental measuring that finds the exact dependence between deflection and applied force on one point of structure.

Keywords:

Geometric nonlinearity, snap-through, von Mises truss, theory of 1st order, theory of 2nd order, FEM, experiment

Obsah

Seznam použitých zkratek a symbolů	7
1. Úvod.....	9
2. Nelineární úlohy konstrukcí	10
3. Analyticko-numerické řešení von Misesovy příhradové konstrukce	17
3.1. Řešení podle teorie 1. řádu.....	17
3.2. Řešení podle teorie 2. řádu.....	18
3.3. Alternativní řešení pomocí principu minima potenciální energie	28
3.4. Řešení pomocí metody konečných prvků	31
4. Analyticko-numerické řešení modifikované von Misesovy příhradové konstrukce s uvažováním pružných podpor	37
4.1. Řešení podle teorie 1. řádu.....	37
4.2. Řešení podle teorie 2. řádu.....	38
4.3. Alternativní řešení pomocí principu minima potenciální energie	51
4.4. Řešení pomocí metody konečných prvků	52
5. Porovnání:	55
6. Návrh pro experiment	59
7. Závěr	63
8. Seznam použité literatury.....	67

Seznam použitých zkratk a symbolů

Označení	Název	Jednotka
A	plocha průřezu	[m ²]
B_X, B_Y	reakce v bodu B	[N]
DR	Dynamic Relaxation	-
E	Youngův modul pružnosti	[Pa]
EPB	Elastic Post-Buckling	-
Err1	Relativní chyba	[%]
Err2	Chyba	[N]
$F, F_1, F_2,$	Síla	[N]
F_{Ekrit}	kritická síla na vzpěr podle Eulera	[N]
F_{EXT}	kritická síla	[N]
IEPB	Inlastic Post-Buckling	-
J	kvadratický moment průřezu	[m ⁴]
L	Délka	[m]
M_R	Reakční moment	[N·m]
MKP	metoda konečných prvků	-
N, N_1, N_2	Normálová síla	[N]
R_1, R_2	Reakce	[N]
SBRA	Simulation-Based Reliability Assessment	-
U_1, U_2	potenciální energie členu	[J]
V	objem	[m ³]
W_F	Práce vnějších sil	[J]
a	vzdálenost	[m]
b	vzdálenost	[m]
c_1, c_2	tuhost	[N·m ⁻¹]
c_X, c_Y	tuhost pružin	[N·m ⁻¹]
k	tuhost prutu	[N·m ⁻¹]
u_B, v_B	posuv bodu B	[m]
v_2	Průhyb	[m]
v_2^*	Skutečný průhyb	[m]

$v_A, v_{A0}, v_{A1}, v_{A2}, v_{A3},$ v_{A4}, v_{A5}	posuv bodu A	[m]
$\Delta L, \Delta L_1, \Delta L_2$	změna délky	[m]
Π	celková potenciální energie	[J]
α	úhel natočení	[rad]
α_{EXT}^*	kritický úhel natočení	[rad]
α^*	Skutečný úhel natočení	[rad]
ε	poměrná podélná deformace	[1]
μ	Poissonovo číslo	[1]
$\sigma, \sigma_1, \sigma_2$	napětí	[Pa]

1. Úvod

Problematika nelinearit v konstrukcích je velmi obsáhlá oblast. Tato diplomová práce se zabývá konkrétně porovnáním 1. řádu, 2. řádu a metody konečných prvků v souvislosti se snap-through efektem, který spadá do oblasti geometrických nelinearit. Tento problém je podrobněji vysvětlen na jednoduchém příkladu, von Misesově nosníku s uložením na tuhých podporách a následně na modifikované úloze s pružnými podporami.

V první části jsou teoreticky popsány typy nelinearit v konstrukcích. Pozornost je věnována především geometrickým nelinearitám, konkrétně snap-through efektem, na který je diplomová práce zaměřená. Dále je popsán rozdíl mezi teorií malých deformací (1. řádu, teorií 2. řádu) a teorií velkých deformací.

Další část je praktická, ve které je na jednoduché konstrukci provedeno analyticko-numerické řešení dle teorie 1. a 2. řádu malých deformací a následně řešení pomocí MKP (teorie velkých deformací). Tato úloha je pak modifikována nahrazením absolutně tuhých podpor podporami pružnými.

Cílem této diplomové práce je porovnání výsledků a určení vhodnosti těchto teorií při popisu snap-through efektu této konstrukce. Následně je proveden návrh přípravku pro experiment, který může být využit v laboratořích katedry Aplikované mechaniky VŠB-TUO.

2. Nelineární úlohy konstrukcí

Chování konstrukcí lze popsat různými způsoby, které se liší jak složitostí, tak i přesností a odlišností modelů od reálného stavu. Jako nejčastější a nejjednodušší popis se používá popis pro lineární mechaniku kontinua pro oblast pevných těles. Předpokládá se, že vlivem zatěžování dojde k lineárně závislé odezvě. Mnohdy si s lineárním popisem vystačíme jakožto s orientačním řešením, které nám dá představu o chování dané konstrukce.

Lineární mechanika kontinua pro oblast pevných těles je postavena na následujících předpokladech:

- Platnost Hookeova zákona
- Posuvy jsou malé vůči rozměrům tělesa
- Malá přetvoření, platí Cauchyho kinematické vztahy
- Podmínky rovnováhy platí pro nedeformovanou konstrukci

Ve spoustě případů si však s lineárním popisem nelze vystačit, nebo ho nelze vůbec použít kvůli velkým odlišnostem od reálného stavu. Proto je nutné použít popis nelineární.

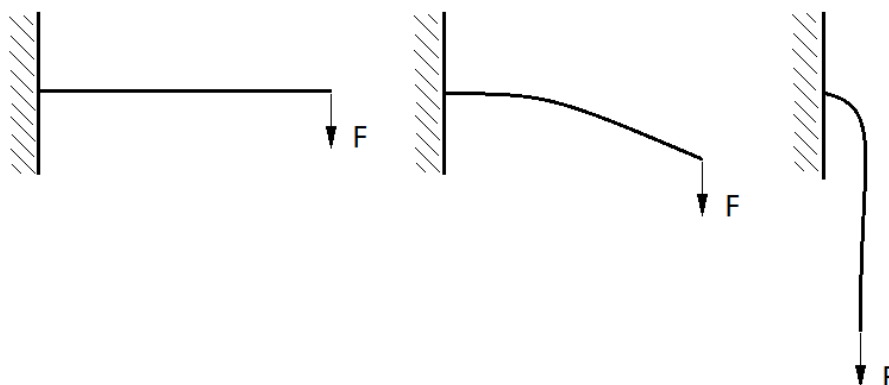
Nelineární analýzy struktur počínají u Leonarda Eulera (1707-1783). Ve svém dodatku „De curvis elasticis“ Euler používá variační metodu pro vyjádření zatížení pro vzpěr přímého nosníku. Tento problém stability lze vyřešit pouze za předpokladu rovnic rovnováhy, které platí pro deformovaný nosník. Tyto rovnice rovnováhy, vyjádřené v deformovaném stavu nosníku, v sobě zahrnují posuvy jako proměnnou veličinu. V rovnicích rovnováhy jsou dále posuvy násobeny silami, které jsou odvozeny z posuvů. Tento výsledek vede k rovnicím, které jsou nelineární z hlediska neznámých posuvů. [1]

Později bylo objeveno mnoho dalších druhů nelinearity v oblasti mechanického chování těles a tekutin. Hlavní nelinearity, které se dnes uvažují v analýzách konstrukcí, lze rozdělit následovně:

Geometrická nelinearita

Geometrická nelinearita souvisí se změnami v geometrii struktury během analýzy. Tato nelinearita nastává vždy, když velikost posuvů ovlivňuje reakci struktury. To může být způsobeno buď velkými výchylkami nebo rotacemi, počátečním napětím nebo snap-through efektem.

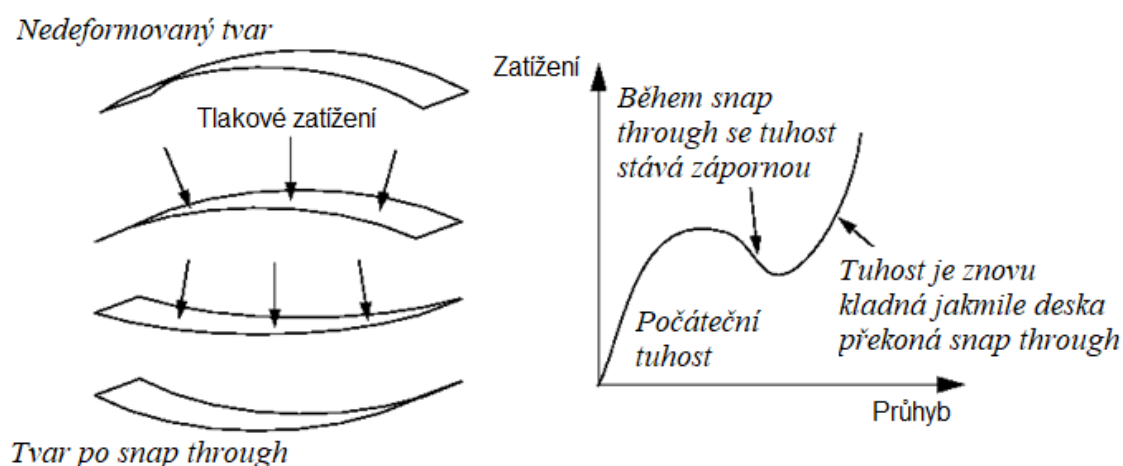
Jako příklad lze uvažovat na jednom konci vetknutý nosník, který je na druhém konci zatížen silou F , viz obr. 1.1.



Obrázek 1.1 – Velké deformace

Pokud jsou výchylky nosníku malé, lze analýzu považovat za přibližně lineární. Pokud jsou však výchylky nosníku velké, mění se tvar konstrukce a tím i její tuhost. Kromě toho, pokud zatížení nezůstane kolmé na nosník, působení zatížení na konstrukci se významně změní. Když se nosník vychýlí, zatížení může být rozloženo na složku kolmou k nosníku a složku působící normálově k nosníku. Oba tyto účinky přispívají k nelineární odezvě nosníku, a to změnou tuhosti nosníku při zvyšování zatížení.

Z uvedeného vyplývá, že velké průhyby a rotace mají velký vliv na způsob, jakým jsou konstrukce zatíženy. Geometrická nelinearita však nastává i v případě, kdy posunutí nejsou velké vzhledem k rozměrům konstrukce. Na obrázku 1.2 je znázorněn případ snap-through efektu, kdy na velkou desku působí tlak.



Obrázek 1.2 – Princip snap-through efektu

Zdroj: <https://abaqus-docs.mit.edu/2017/English/SIMACAEFSARefMap/simagsa-c-nlgeomnonlin.htm>

V tomto příkladu dochází ke změně tuhosti desky při její deformaci. Když se deska překlopí, bude její tuhost záporná. I když je tedy velikost posuvů vzhledem k rozměrům desky poměrně malá, je zde významná a zajímavá geometrická nelinearita.

V praxi se lze s touto nelinearitou setkat například u obloučkového uzávěru sklenice, který svou konstrukcí drží víko zavřené, dokud není překročena kritická síla pro překonání snap-through efektu.



Obrázek 1.3 – Příklad snap-through efektu na uzávěru sklenice

Jako další příklad lze použít deštník, který se chová jako konstrukce na pružných podporách vlivem pružnosti materiálu, který je připojen ke kostře deštníku.



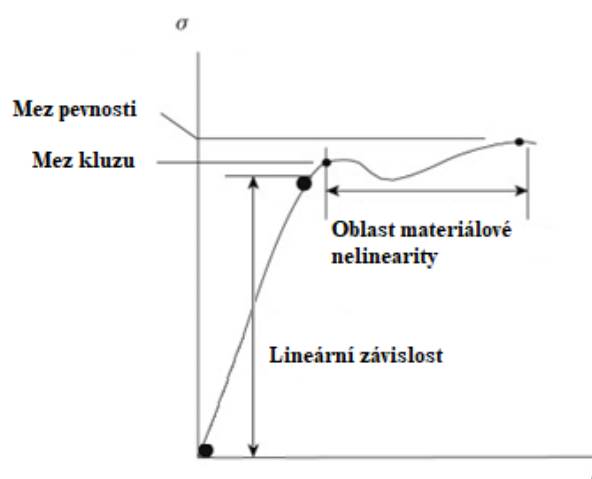
Obrázek 1.4 – Příklad snap-through efektu na deštníku (předtím)



Obrázek 1.5 – Příklad snap-through efektu na deštníku (potom)

Materiálové nelinearity

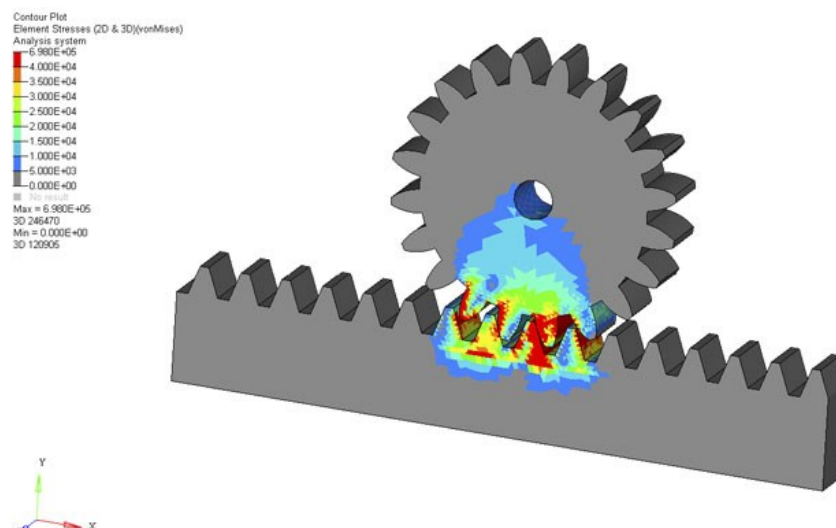
Lineárně elastické konstituční zákony jsou jen aproximacemi reálného chování materiálu. Materiál, jako je například guma, je nelineárně elastický (tj. napětí nejsou lineárně úměrné k poměrné deformaci). Materiál se také může stát plastickým, jestliže je překročena mez kluzu (tj. část poměrné deformace zůstává poté, co na materiál nepůsobí žádné vnější zatížení). Některé materiály mohou také dosáhnout časově závislé deformace. Existují specifické konstituční modely pro elasto-plastické, visko-elastické a visko-plastické chování různých typů materiálů. Mezi materiálové nelinearity lze zařadit také vliv teploty (mění se materiálové vlastnosti).



Obrázek 1.6 – Materiálová nelinearita

Nelinearity v okrajových podmínkách

Typickou úlohou na nelinearitu v okrajových podmínkách je kontaktní problém, viz obr. 1.7. Kontaktní vazba přenáší sílu ve směru tlaku ale nikoliv ve směru tahu. Přenáší-li vazba tlak, pak není dopředu známo rozložení kontaktního tlaku a není známa ani velikost a tvar kontaktní plochy.



Obrázek 1.7 – Úloha s kontaktem

Zdroj: <https://hyperworks.com.mx/solution/Structural-Analysis>

Tyto nelinearity lze následně rozdělit z hlediska závislostí (tj. zatížení závislé na posuvech, tuhost závislá na posuvech, aj.). Stabilitu lze uvažovat jako speciální případ nelinearity, jelikož může nastat z důsledku geometrické nebo materiálové nelinearity.

Teorie 1. řádu

Teorie 1. řádu je založena na principu vyjádření podmínek rovnováhy na nedeformované konstrukci. Vyučuje se v běžné inženýrské statice. Jde o důsledek tzv. předpokladu malých deformací (změny tvaru konstrukce jsou malé vzhledem k rozměrům konstrukce), díky kterému lze spolu s lineární závislostí mezi napětím a přetvořením využít princip superpozice.

Teorie 2. řádu

Teorie druhého řádu slouží ke zjednodušení metod geometricky nelineárních analýz konstrukcí. Je postavena na následujících předpokladech:

- Rovnice rovnováhy se vyjadřují na deformovaném tvaru konstrukce
- Platnost teorie malých deformací
- Osové síly nemění své rozložení při deformaci konstrukce

Teorie velkých deformací

Teorie velkých deformací bere v úvahu kromě změny tvaru také změnu délky konstrukce. Je zde nelineární závislost mezi zatížením a deformací. Tato metoda je přesnější, ale je obtížné získat řešení oproti předchozím teoriím.

Na obrázku 1.8 lze vidět rozdíl mezi teorií prvního řádu, teorií druhého řádu a teorií velkých deformací.

Theory of small deformations:		Theory of large deformations:
1 st order	2 nd order	
Reaction moment: $M_R = F_1 L$	Reaction moment: $M_R = F_1 L + F_2 v_2$	Reaction moment: $M_R = F_1 L^* + F_2 v_2^*$
Linear dependencies between loadings and deformations, Small strains	Linear or nonlinear dependencies between loadings and deformations, Small strains	Nonlinear dependencies between loadings and deformations, Large strains
Easy to obtain the solution	Harder to obtain the solution	Very difficult to obtain the solution

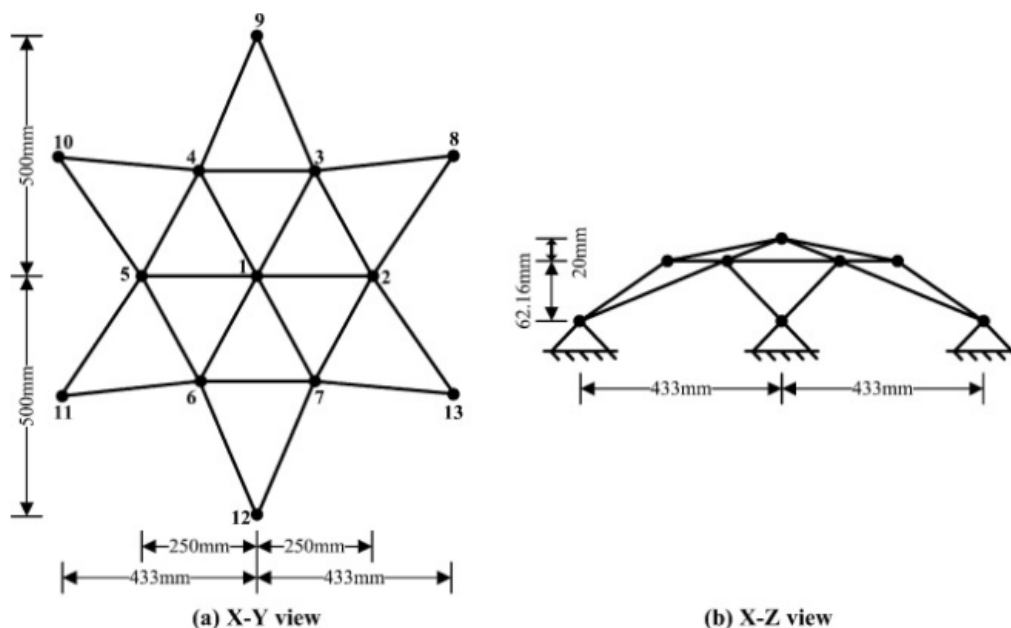
Obrázek 1.8 – Nosník namáhaný kombinovaným zatížením [2]

Na obrázku 1.8 je vlevo zobrazen princip teorie 1. řádu. Je zde lineární závislost mezi zatížením a deformací a platí zde teorie malých deformací, řešení lze získat jednoduše. Uprostřed je zobrazen princip teorie 2. řádu, závislost mezi zatížením a deformací zde může být lineární nebo nelineární. Zde také platí teorie malých deformací, je ale složitější zde získat řešení. Napravo je zobrazena teorie velkých deformací, kdy závislost mezi zatížením a deformací je nelineární a je obtížné získat řešení.

Více o nelinearitách a jejich významu v MKP je uvedeno v [3].

Stav řešení problematiky

Autoři ve [4] popisují pomocí metody dynamické relaxace nelineární chování konstrukcí. Za účelem prokázání schopnosti navrhovaných strategií je analyzováno několik 3D a 2D konstrukcí s geometricky nelineárním chováním.



Obrázek 1.9 – Příklad 3D konstrukce s geometricky nelineárním chováním (star truss) [4]

V [5] byla vyvinuta metodika pro provádění nelineární postbucklingové analýzy ocelových prostorových příhradových systémů. Geometrické efekty prvního řádu jsou zahrnuty pomocí geometrické matice tuhosti. Účinky druhého řádu jsou zahrnuty prostřednictvím formulace transformace souřadnicových souřadnic. V této literatuře je prezentována strategie inkrementálního/iteračního řešení využívající modifikované Newtonovy-Raphsonovy iterace s konstantním omezením délky oblouku.

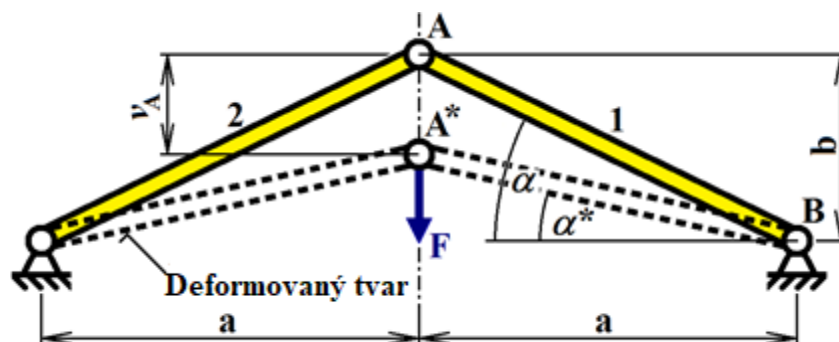
Autoři v [6] pozorovali účinky vzpěru a poddajnosti členů nosníku na konečnou sílu v prostoru. V této literatuře jsou vyvedeny užitečné závěry pro výběr vhodného algoritmu a správného referenčního zatížení za účelem získání buď klasického lineárního vzpěrného zatížení nebo dobrého přiblížení skutečného geometricky nelineárního vzpěrného zatížení.

O nelinearitách dále píše Crisfield [7] a Hrinda [8], který rozepisuje použití metody délky oblouku a její význam kvůli kritickým bodům geometricky nelineárních struktur, které se objevují během reakce na velké zatížení.

V [9] představuje příspěvek autorů Ramesh a Krishnamoorthy neelastickou vzpěrovou analýzu struktur metodou Dynamické Relaxace (DR). Zjednodušená formulace neelastických konečných prvků pro příhradové prvky a nové algoritmy jsou navrženy pro analýzu Elastic Post-Buckling (EPB) a Inelastic Post-Buckling (IEPB) pomocí metody DR. Vzpěr pro elastické analýzy, analýzy EPB a IEPB je zachycen pomocí metody proměnné délky oblouku.

3. Analyticko-numerické řešení von Misesovy příhradové konstrukce

Popis příkladu: Rovinný nosník složený ze dvou členů je zatížen svislou silou F , viz obrázek 2.1. Materiál prutů je izotropní, lineární a elastický. Kloubová vazba je bez tření a je absolutně tuhá. Maximální působící tlaková síla je dostatečně malá, aby nebyla překonána hodnota Eulerovy kritické síly, jak je popsáno v [10].

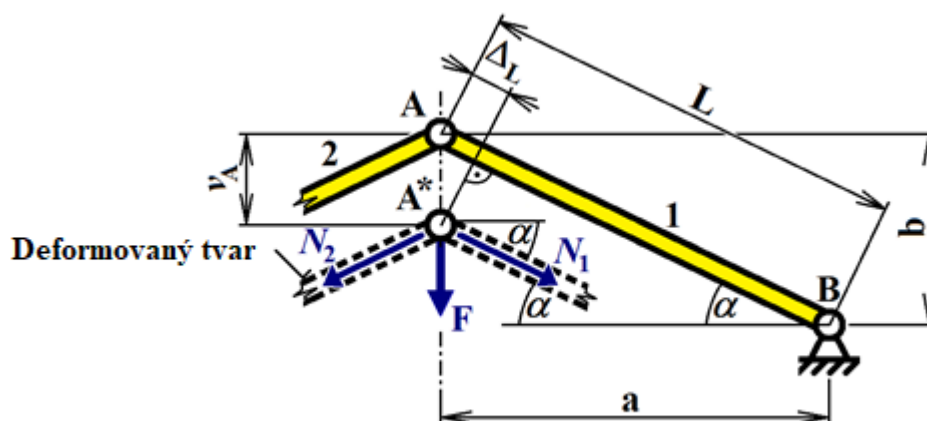


Obrázek 2.1 – Von Misesova příhradová konstrukce zatížená silou F (tuhé podpory)

Zdroj: FRYDRÝŠEK, K., syllabus textů geometrických nelinearit [11]

3.1. Řešení podle teorie 1. řádu

Teorie prvního řádu předpokládá lineární závislost mezi zatížením (F) a deformací (v_A), díky předpokladu, že úhel α se nemění. Tento postup je nejjednodušší, lze ho však uplatnit jen za předpokladu malých deformací. Nepřesnost výpočtu roste s velikostí deformace.



Obrázek 2.2 – Von Misesova příhradová konstrukce podle teorie 1. řádu

Zdroj: FRYDRÝŠEK, K., syllabus textů geometrických nelinearit [11]

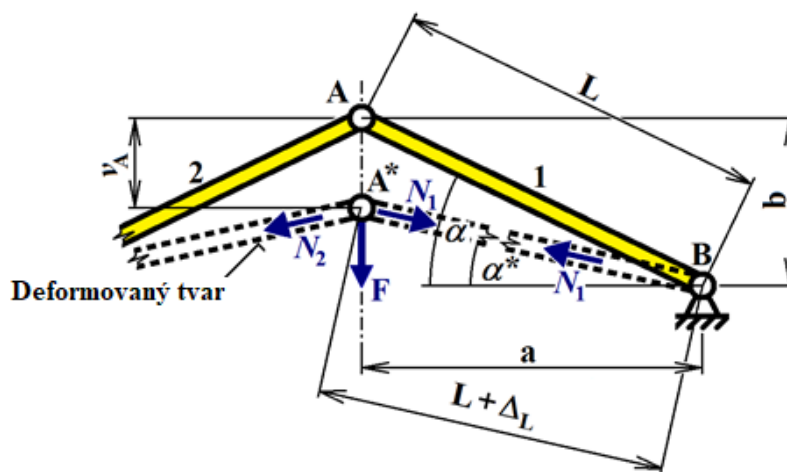
Platí tedy vztahy, uvedené v tabulce 2.1:

Tabulka 2.1 (řešení dle teorie 1. řádu)

$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right)$
$N = N_1 = N_2 = \frac{-F}{2\sin\alpha}$
$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N}{A} = \frac{-F}{2A\sin\alpha}$
$L = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\Delta L = \Delta L_1 = \Delta L_2 = \frac{NL}{EA} = \frac{-FL}{2EA \sin\alpha}$
$v_A = \frac{\Delta L}{\sin\alpha} = \frac{-FL}{2EA \sin^2\alpha}$
$B_X = -N\cos\alpha = \frac{F\cos\alpha}{2\sin\alpha}$
$B_Y = \frac{F}{2}$

3.2. Řešení podle teorie 2. řádu

Nelineární řešení podle teorie druhého řádu předpokládá změnu původního úhlu α na α^* vlivem deformace nosníku pod silou F . Předpokládaná deformace a změna úhlu je vidět na obrázku 2.3.



Obrázek 2.3 – Von Misesova příhradová konstrukce podle teorie 2. řádu

Zdroj: FRYDRÝŠEK, K., syllabus textů geometrických nelinearit [11]

Užitím styčnickové metody lze v bodě “A*” napsat rovnice rovnováhy pro deformovaný nosník.

Rovnice rovnováhy:

$$\sum_i Fx_i = 0 = N_1 \cos \alpha^* - N_2 \cos \alpha^* \quad (2.1)$$

$$\sum_i Fy_i = 0 = N_1 \sin \alpha^* + N_2 \cos \alpha^* + F \quad (2.2)$$

Potom pro normálovou sílu N platí:

$$N = N_1 = N_2 = \frac{-F}{2 \sin \alpha^*} \quad (2.3)$$

Úhel α^* je neznámý, je proto nutné přidat deformační podmínku. Z obrázku 2.3 lze určit:

$$(L + \Delta_L) \cos \alpha^* = a \quad (2.4)$$

Přičemž platí, že:

$$L = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.5)$$

$$\Delta_L = \Delta_{L1} = \Delta_{L2} = \frac{NL}{EA} = \frac{-FL}{2EA \sin \alpha^*} \quad (2.6)$$

Dosazením rovnice (2.6) do rovnice (2.4) lze vyjádřit:

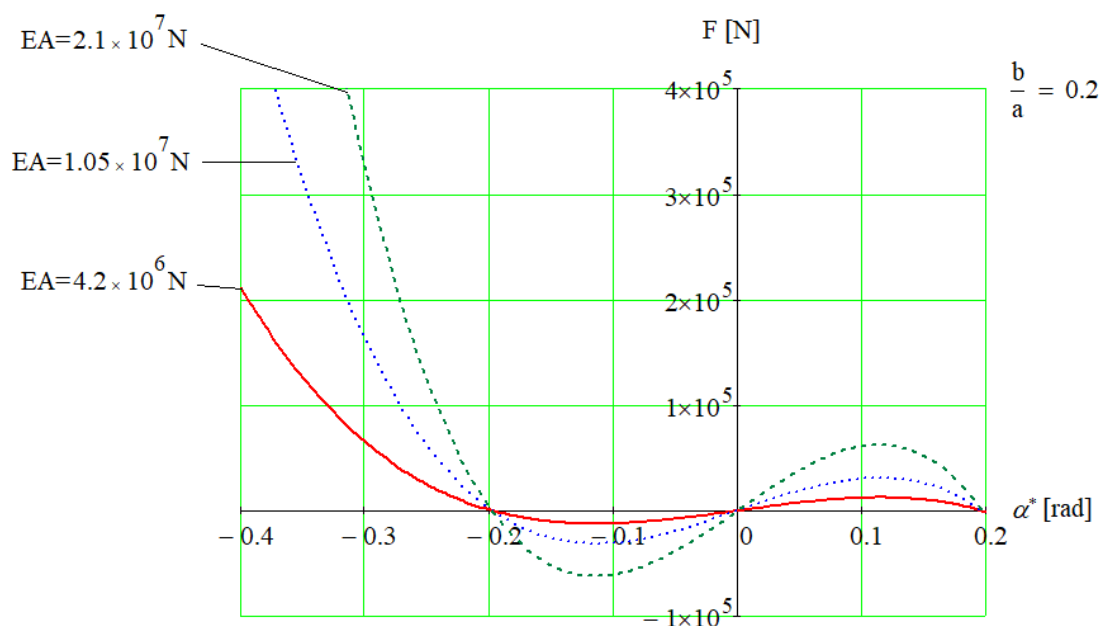
$$\begin{aligned} \left(L - \frac{-FL}{2EA \sin \alpha^*} \right) \cos \alpha^* = a &\Rightarrow \frac{F}{2EA \sin \alpha^*} = 1 - \frac{a}{L \cos \alpha^*} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{F}{2EA} = \tan \alpha^* \left(\cos \alpha^* - \frac{a}{L} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pro vyjádření závislosti působící síly na výsledném úhlu α^* lze upravit rovnici (2.7) do tvaru:

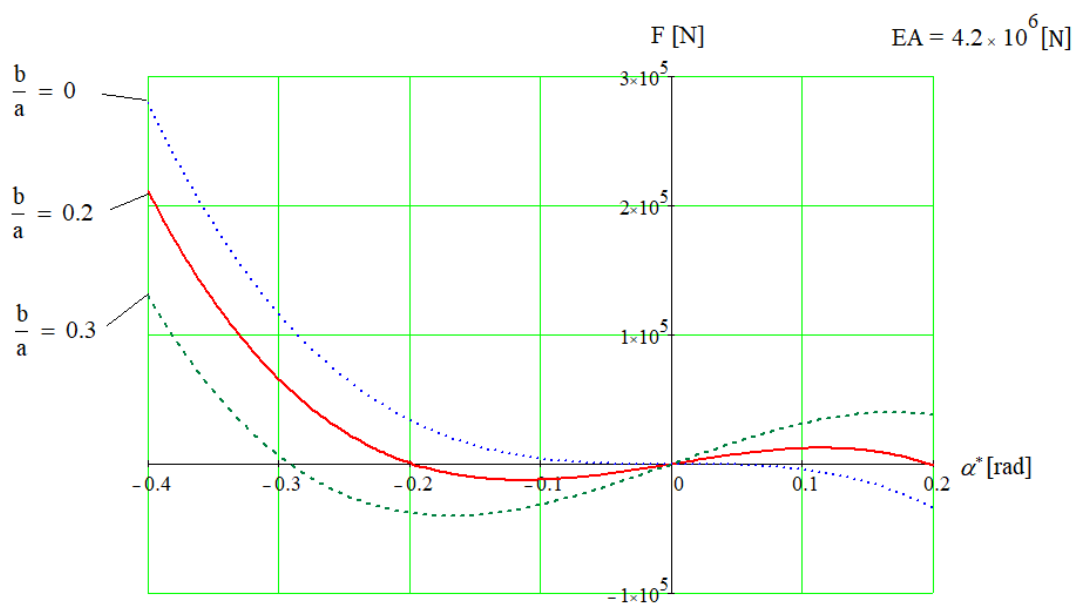
$$F = 2EA \tan \alpha^* \left(\cos \alpha^* - \frac{a}{L} \right) \quad (2.8)$$

a pro další výpočty i její derivaci:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha^*} = 2EA \left(\cos \alpha^* - \frac{a}{L \cos^2 \alpha^*} \right) \quad (2.9)$$



Obrázek 2.4 – Závislost síly F na úhlu α^* pro různé tuhosti v tahu/tlaku EA



Obrázek 2.5 – Závislost síly F na úhlu α^* pro různé hodnoty parametru $\frac{b}{a}$

Následně lze z rovnice (2.9) určit lokální extrémy hodnot působící síly F , hledá se tedy úhel α^*_{EXT} který se určí z rovnice $\frac{\partial F}{\partial \alpha^*} = 0$.

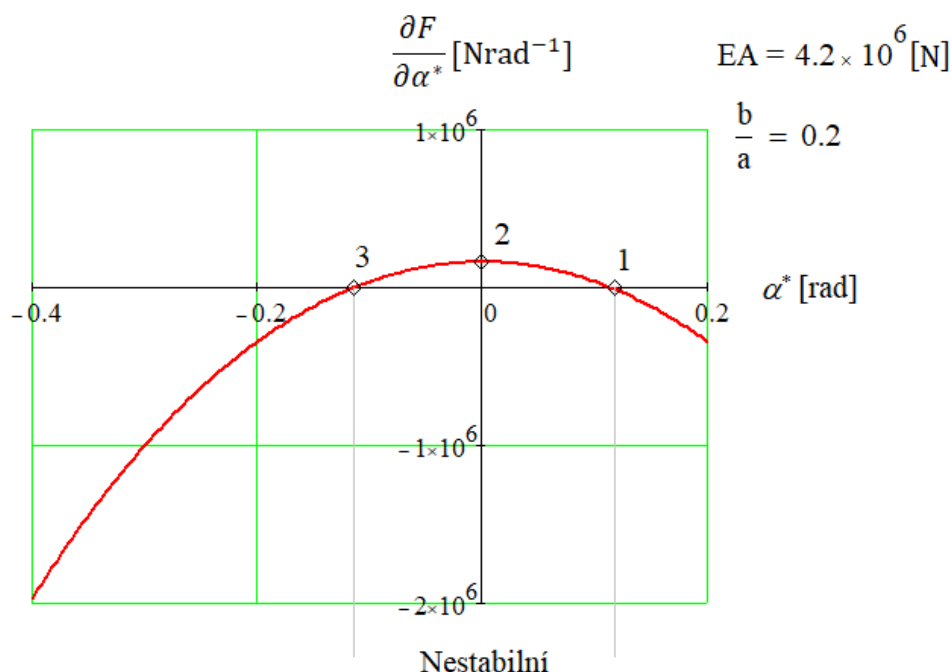
$$2EA \left(\cos \alpha_{EXT}^* - \frac{a}{L \cos^2 \alpha_{EXT}^*} \right) = 0 \Rightarrow \cos \alpha_{EXT}^* - \frac{a}{L \cos^2 \alpha_{EXT}^*} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^3 \alpha_{EXT}^* = \frac{a}{L} \Rightarrow \cos \alpha_{EXT}^* = \sqrt[3]{\frac{a}{L}} \Rightarrow \alpha_{EXT}^* = 2\pi n \pm \arccos \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}} \right) \quad (2.10)$$

pro $n \in \mathbb{Z}$, kde \mathbb{Z} je množina celých čísel. Fyzikální význam mají však pouze kořeny, pro které platí:

$$\alpha_{EXT}^* = \arccos \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}} \right) \quad (2.11)$$

Závislost $\frac{\partial F}{\partial \alpha^*}$ na úhlu α^* lze vidět na obrázku 2.6., kde α_{EXT}^* se nachází v bodech “1” a “3”.



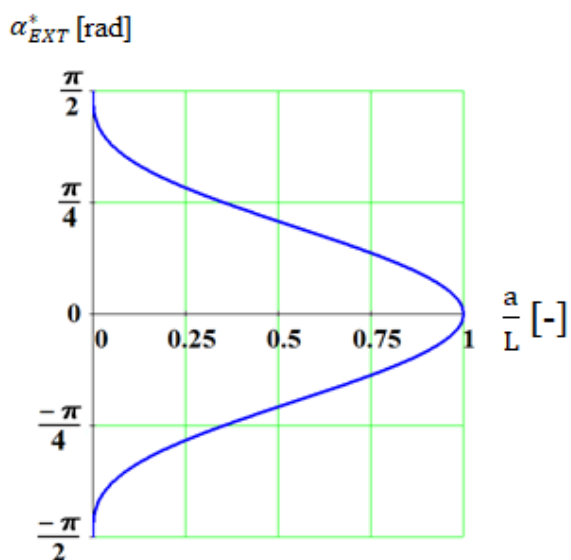
Obrázek 2.6 – Závislost $\frac{\partial F}{\partial \alpha^*}$ na úhlu α^*

Pro určení maximální síly $F = F_{EXT}$ lze využít závislost parametrů α_{EXT}^* na $\frac{a}{L}$ a pravidel pro pravoúhlý trojúhelník, viz obrázek 2.8., kde platí, že

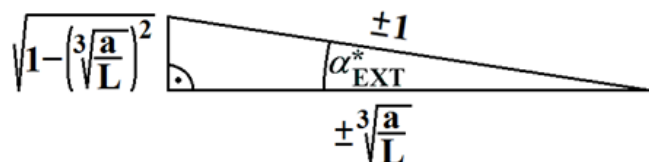
$$\cos \alpha_{EXT}^* = \cos \left[\pm \arccos \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}} \right) \right] = \sqrt[3]{\frac{a}{L}} \quad \text{a dále}$$

$$\tan \alpha_{EXT}^* = \tan \left[\pm \arccos \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}} \right) \right] = \pm \frac{\sqrt{1 - \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}} \right)^2}}{\sqrt[3]{\frac{a}{L}}}. \quad \text{Pro sílu } F_{EXT} \text{ tedy platí:}$$

$$F_{EXT} = 2EA \tan \alpha_{EXT}^* \left(\cos \alpha_{EXT}^* - \frac{a}{L} \right) = \pm 2EA \frac{\sqrt{1 - \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}} \right)^2} \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}} - \frac{a}{L} \right)}{\sqrt[3]{\frac{a}{L}}} \quad (2.12)$$



Obrázek 2.7 – Závislost α_{EXT}^* na parametru $\frac{a}{L}$



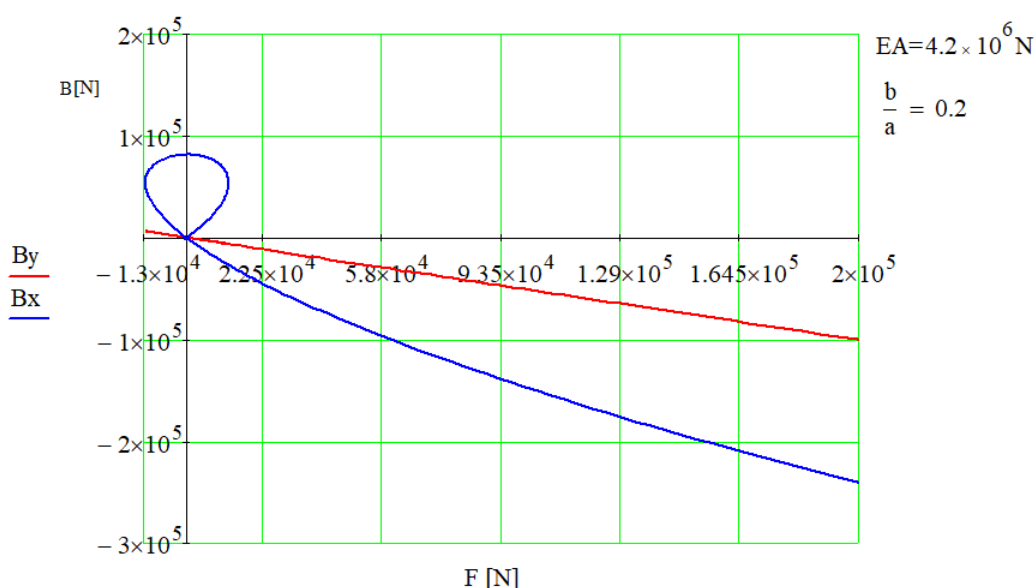
Obrázek 2.8 – Závislost mezi úhlem α_{EXT}^* a parametrem $\frac{a}{L}$

Pro určení reakcí v bodě B (obrázek 2.3) lze vyjít z rovnic pro normálovou sílu (2.3).

$$B_y = -\frac{F}{2}$$

$$B_x = -N \cos \alpha^* \quad (2.13)$$

Na obrázku 2.8 jsou zobrazeny reakce v podpěrách. Lze vidět, že reakce B_y je lineárně závislá na zatěžovací síle F , kdežto reakce B_x se chová nelineárně. Bod „1“ představuje počátek působení síly a zároveň situaci, kdy $\alpha^* = -\alpha_0$. Lze vidět, že reakce B_x má lokální extrém v bodě „2“, který představuje situaci, kdy jsou oba členy v horizontální pozici.



Obrázek 2.8 – Reakční síly v podpěrách v závislosti na velikosti síly F

Podobným způsobem lze také vyjádřit normálovou sílu N jako funkci úhlu α^* . Platí tedy:

$$N = \frac{-F}{2 \sin \alpha^*} = \frac{-2EA \tan \alpha^* \left(\cos \alpha^* - \frac{a}{L} \right)}{2 \sin \alpha^*} = EA \left(\frac{a}{L \cos \alpha^*} - 1 \right) \quad (2.14)$$

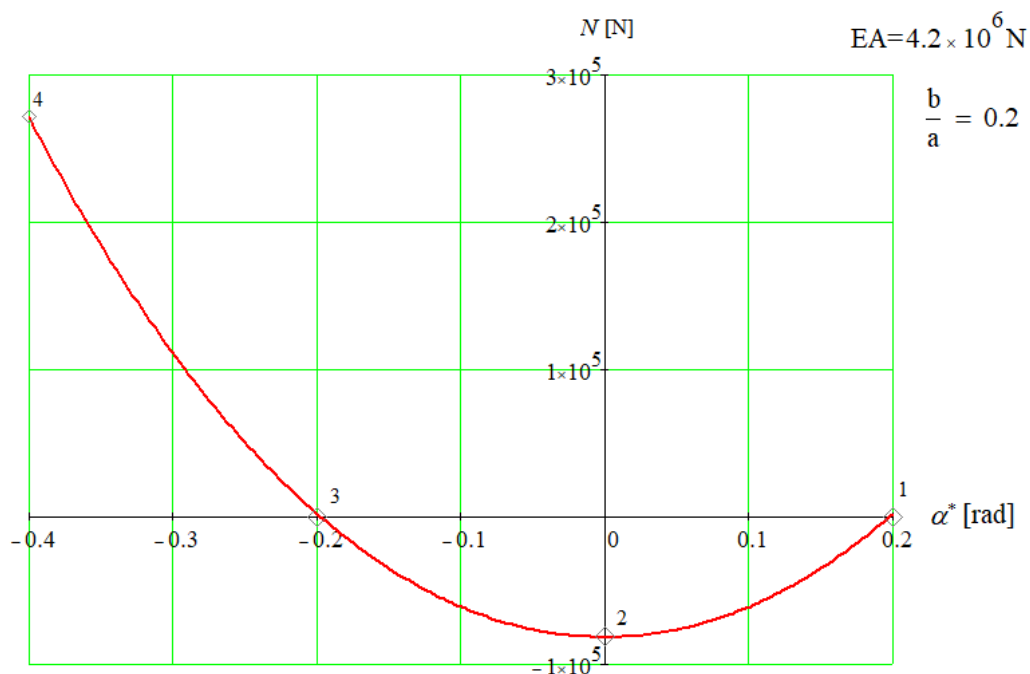
Lokální extrém, kdy je normálová síla $N = N_{MIN}$, nastane v situaci, kdy $\alpha^* = 0$ rad (tedy když deformované pruty jsou v horizontální pozici s maximálním tlakem – bod 2 na obrázku 2.9) Proto:

$$N_{MIN} = EA \left(\frac{a}{L \cos 0} - 1 \right) = EA \left(\frac{a}{L} - 1 \right) \quad (2.15)$$

Rovnici (2.15) lze také vyjádřit z deformační podmínky (rovnice 2.4):

$$(L + \Delta_{LMIN}) \cos 0 = a \Rightarrow \frac{\Delta_{LMIN}}{L} = \varepsilon_{MIN} = \frac{a}{L} - 1 \Rightarrow N_{MIN} = EA \varepsilon_{MIN} \quad (2.16)$$

Zatěžovací dráha z bodu “1” do bodu “3” vede k záporným normálovým silám v obou členech konstrukce (tlak) a zatěžovací dráha z bodu “3” do bodu “4” vede ke kladným normálovým silám (tah), viz obrázek 2.9.

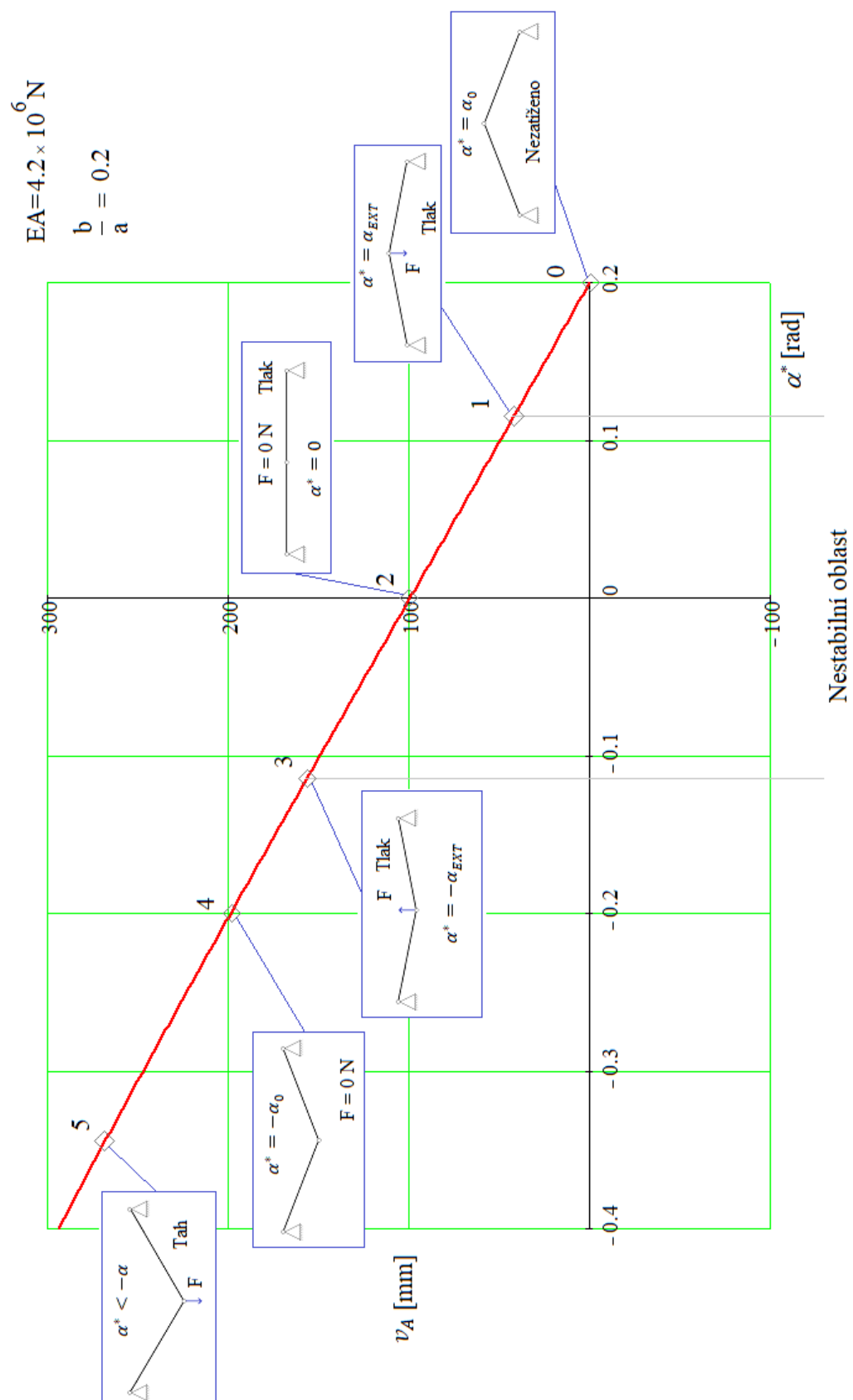


Obrázek 2.9 – Závislost normálové síly N na úhlu α^*

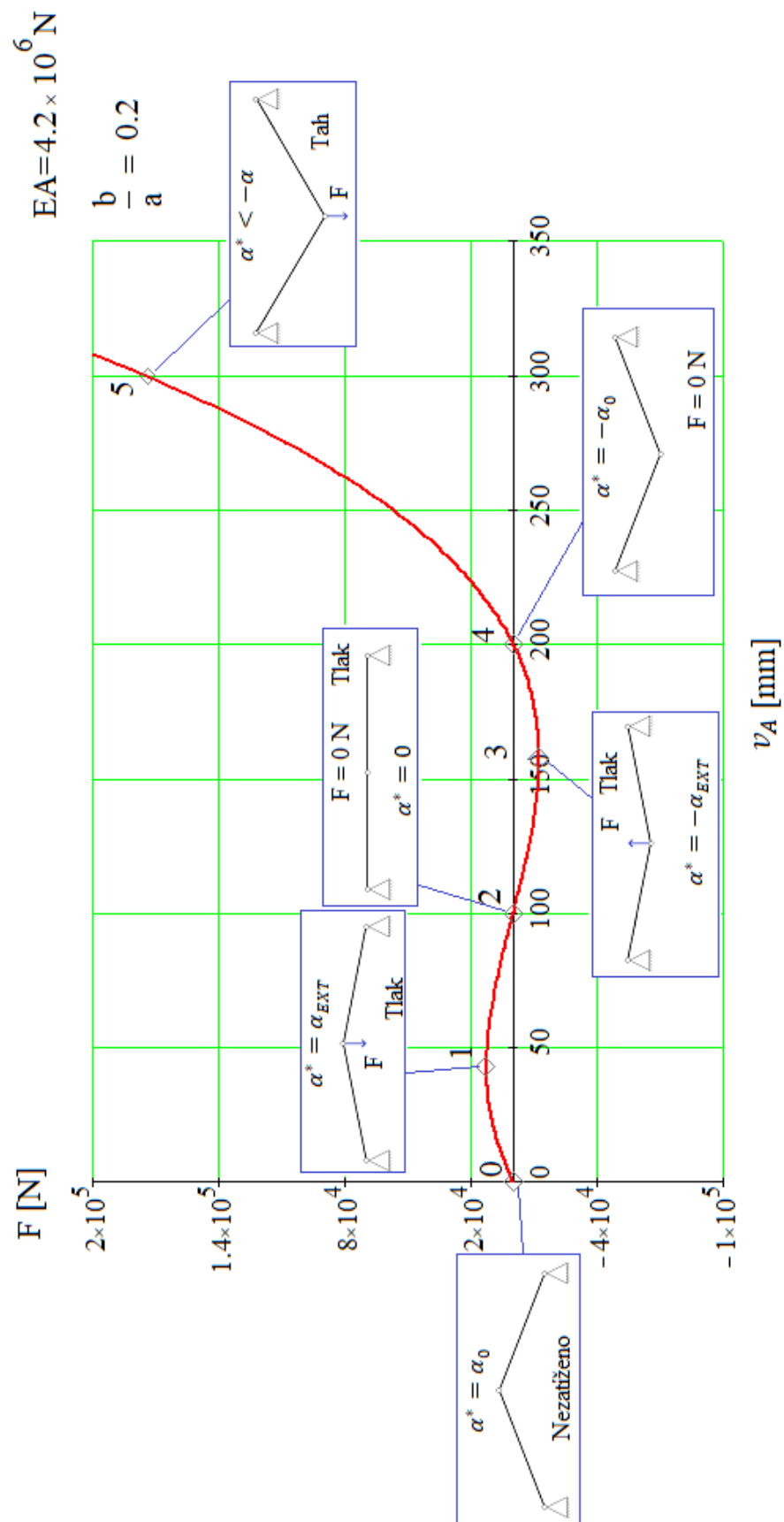
Z obrázku 2.3 lze vyjádřit závislost posuvu bodu A ve vertikálním směru:

$$v_A = b - a \tan \alpha^* \quad (2.17)$$

Lze vidět, že posuv v_A je téměř lineárně závislý na úhlu α^* (obrázek 2.10). Je však nelineární v závislosti na působící síle F (viz obrázek 2.11).



Obrázek 2.10 – Závislost posuvu v_A na úhlu α^*



Obrázek 2.11 – Závislost posuvu v_A na síle F

Bod „0“ na obrázcích 2.10 a 2.11 představuje nezatížený stav, tedy

$$\alpha^* = \alpha_0 = \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right) \text{ a posuv } v_{A0} = b - a \tan\left[\operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right)\right] = b - a \frac{b}{a} = 0.$$

Bod „1“ na obrázcích 2.10 a 2.11 představuje situaci, kdy $\alpha^* = \alpha_{EXT} = \operatorname{acos}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right)$ a posuv

$$v_{A1} = b - a \tan \alpha_{EXT} = b - a \tan\left[\operatorname{acos}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right)\right] = b - a \frac{\sqrt{1 - \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right)^2}}{\sqrt[3]{\frac{a}{L}}}.$$

Bod „2“ na obrázcích 2.10 a 2.11 představuje situaci, kdy oba zatížené členy jsou v horizontální pozici, tedy $\alpha^* = 0$ rad a posuv $v_{A2} = b - a \tan 0 = b$.

Bod „3“ na obrázcích 2.10 a 2.11 představuje situaci, kdy $\alpha^* = -\alpha_{EXT} = -\operatorname{acos}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right)$

$$\text{a posuv } v_{A3} = b - a \tan(-\alpha_{EXT}) = b + a \tan\left[\operatorname{acos}\left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right)\right] = b + a \frac{\sqrt{1 - \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right)^2}}{\sqrt[3]{\frac{a}{L}}}.$$

Bod „4“ na obrázcích 2.10 a 2.11 představuje situaci, kdy se konstrukce dostává do stabilní polohy po snap-through efektu. Platí tedy: $\alpha^* = -\alpha_0 = \operatorname{atan}\left(\frac{-b}{a}\right) = -\operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right)$ a posuv $v_{A4} = b - a \tan\left[-\operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right)\right] = b + a \frac{b}{a} = 2b$.

Bod „5“ na obrázcích 2.10 a 2.11 představuje situaci, kdy je v obou členech konstrukce tahové napětí a platí, že $\alpha^* < -\alpha_{EXT}$ a posuv $v_{A5} > 2b$.

3.3. Alternativní řešení pomocí principu minima potenciální energie

Alternativní cesta pro vyjádření rovnice (2.8), nebo pro kontrolu výsledků, může být udělána pomocí principu minima potenciální energie Π nosníku:

$$\Pi = U_1 + U_2 - W_F \quad (2.18)$$

kde:

$$U_1 = U_2 = \int_V \frac{E\varepsilon^2}{2} dV = \frac{EAL\varepsilon^2}{2}, \quad (2.19)$$

je potenciální energie poměrné deformace v každém členu s konstantním průřezem, s elastickým chováním materiálu $\sigma = E\varepsilon$ a s objemem $V [\text{m}^3]$, a kde

$$W_F = Fv_A = F(b - a \tan \alpha^*) \quad (2.20)$$

je práce vnější síly F (potenciální energie vnějších sil).

Z obrázku 2.3 a z definice poměrné deformace lze vyjádřit:

$$\varepsilon = \frac{(L + \Delta_L) - L}{L} = \frac{\frac{a}{\cos \alpha^*} - L}{L} = \frac{a}{L \cos \alpha^*} - 1 \quad (2.21)$$

Dosazením pak lze získat:

$$\Pi = EAL \left(\frac{a}{L \cos \alpha^*} - 1 \right)^2 + F(a \tan \alpha^* - b) \quad (2.22)$$

Celková potenciální energie je nyní vyjádřena jako funkce závislá na parametrech α^* a F . Lze tím pádem vyjádřit derivaci potenciální energie podle úhlu α^* :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha^*} &= 2EAa \frac{\left(\frac{a}{L \cos \alpha^*} - 1 \right)^2 \sin \alpha^*}{\cos^2 \alpha^*} + \frac{Fa}{\cos^2 \alpha^*} = \\ &= \frac{a}{\cos^2 \alpha^*} \left[2EA \sin \alpha^* \left(\frac{a}{L \cos \alpha^*} - 1 \right) + F \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Rovnice (2.23) platí pouze tehdy, když:

$$\begin{aligned} 2EA \sin \alpha^* \left(\frac{a}{L \cos \alpha^*} - 1 \right) + F &= 0 \Rightarrow F = 2EA \sin \alpha^* \left(1 - \frac{a}{L \cos \alpha^*} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= 2EA \tan \alpha^* \left(\cos \alpha^* - \frac{a}{L} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

což je rovnice totožná s rovnicí (2.8) a znamená to potvrzení správnosti řešení.

Pro určení stability je dále nutné určit druhou derivaci celkové potenciální energie:

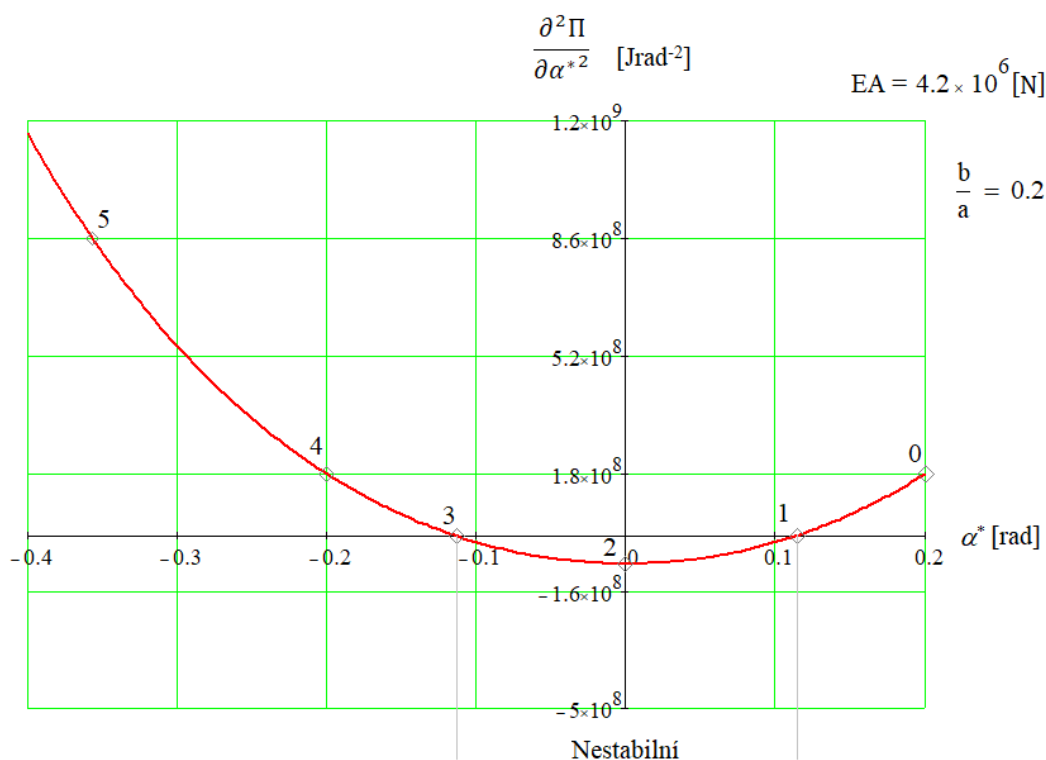
$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha^{*2}} = \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left(\frac{a}{\cos^2 \alpha^*} \left[2EA \sin \alpha^* \left(\frac{a}{L \cos \alpha^*} - 1 \right) + F \right] \right) = \quad (2.25)$$

$$\frac{2a[EA(L \cos^3 \alpha^* - 2aL \cos^2 \alpha^* - 2L \cos \alpha^* + 3a) + FL \cos \alpha^* \sin \alpha^*]}{L \cos^4 \alpha^*}$$

Substitucí rovnice (2.24) do (2.25) pak lze psát:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha^{*2}} = \frac{2EAa}{\cos^4 \alpha^*} \left(\frac{a}{L} - \cos^3 \alpha^* \right) \quad (2.26)$$

Průběh funkce (2.25) je znázorněn v závislosti na úhlu α^* graficky na obrázku 2.12.



Obrázek 2.12 – Závislost $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha^{*2}}$ na úhlu α^*

Stabilita von Misesova příhradového nosníku je zajištěna pouze tehdy, když $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \alpha^{*2}} > 0$.

Tato podmínka je splněna, pokud $\frac{a}{L} - \cos^3 \alpha_{EXT}^* > 0$. Lze tedy psát, že příhradový nosník je:

- Stabilní pro $\alpha^* < -\alpha_{EXT}^*$ nebo $\alpha^* > \alpha_{EXT}^*$, tj. $\alpha^* < -\arccos\left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right)$
nebo $\alpha^* > \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right)$, tj. $|\alpha^*| > \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right)$
- Nestabilní pro $-\alpha_{EXT}^* < \alpha^* < \alpha_{EXT}^*$, tj. $-\arccos\left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right) < \alpha^* < \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right)$,
tj. $|\alpha^*| < \arccos\left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right)$

3.4. Řešení pomocí metody konečných prvků

Rozměry úlohy byly nastaveny tak, aby odpovídaly rozměrům zadané konstrukce. Plocha průřezu prutu je $A=314.159 \text{ mm}^2$, což odpovídá ploše kruhu o poloměru 10 mm. Podpory jsou uvažovány jako absolutně tuhé, vazby jsou bez tření.

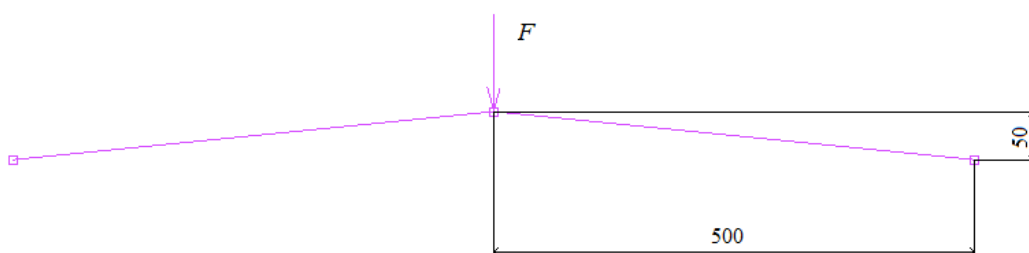
Úloha je řešena v sw MSC. Marc/Mentat. Použitím MKP by měl být výpočet přesnější oproti teorii 2. řádu, protože využívá teorii velkých deformací. Cílem tohoto výpočtu je také následné porovnání výsledků s teorií 2. řádu.

Materiál je izotropní, lineární a elastický a jeho parametry jsou zobrazeny v tabulce:

Tabulka 2.1

Youngův modul pružnosti E	210000 MPa
Poissonovo číslo μ	0.3

Uspořádání úlohy a její rozměry jsou patrné z obrázku.



Obrázek 2.13 – Geometrie von Misesovy příhradové konstrukce [mm]

Okrajovými podmínkami jsou zamezení posuvů ve všech uzlech ve směru osy z a dále zamezení posuvů v podporách. Na konstrukci dále působí lineárně zvyšující se síla $F < 0 \text{ N}; 100000 \text{ N}>$ v závislosti na čase.

Síť je rovinná a je tvořena 3 uzly a 2 elementy typu LINE (2).

Úloha byla zkontrolována na vzpěr podle Eulerovy teorie pro výpočet kritické síly:

$$F_{Ekrit1} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} = \frac{\pi^2 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 7.85 \cdot 10^{-9}}{0.5025^2} = 64468 \text{ N}, \quad (2.27)$$

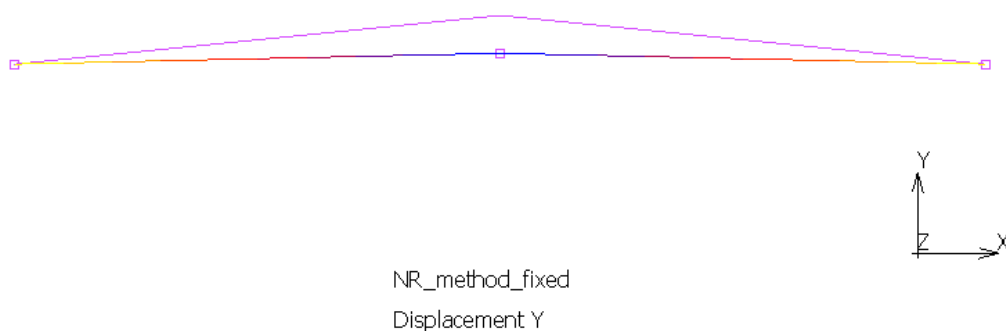
přičemž maximální normálovou sílu v tlaku lze určit ze vztahu (2.15), proto:

$$N_{MIN} = EA \left(\frac{a}{L} - 1 \right) = 210000 \cdot 314.16 \left(\frac{500}{502.5} - 1 \right) = -327414 \text{ N}, \quad (2.28)$$

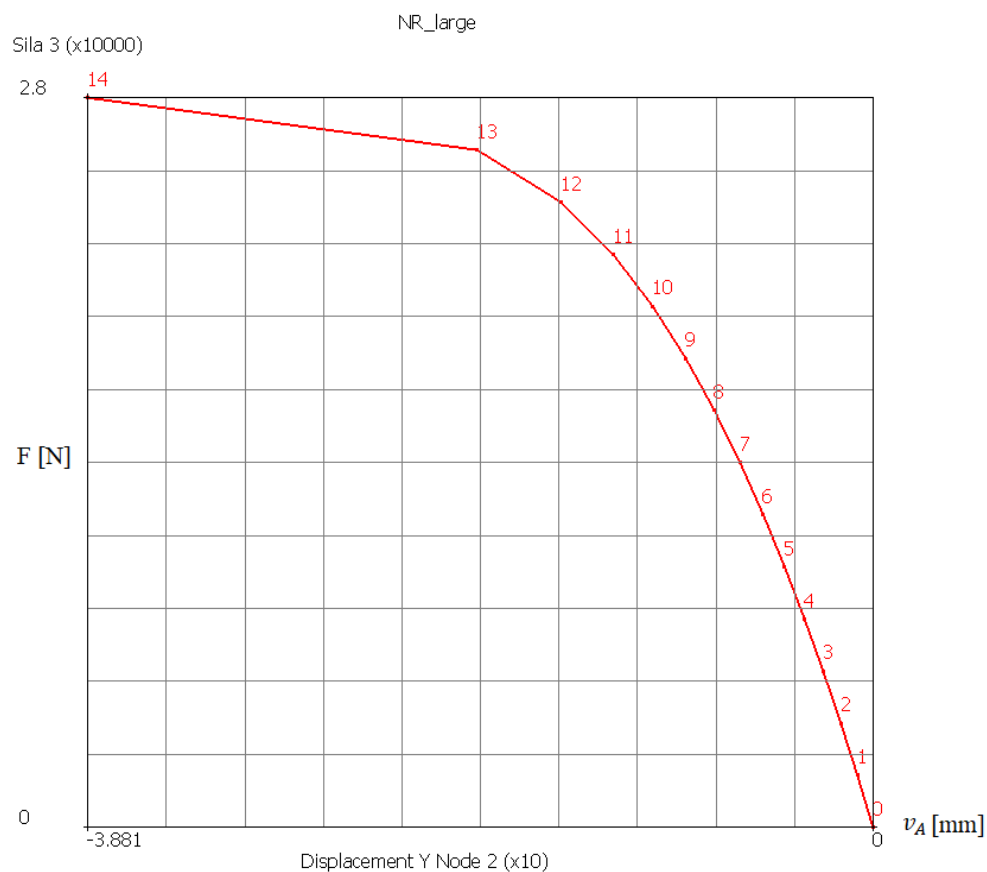
Je tedy splněna podmínka $F_{Ekrit1} > |N_{MIN}|$.

Řešení pomocí Newton Raphson metody, large strain

Pro řešení pomocí Newton Raphsonovy metody byly iterace nastaveny na konstantní časový krok 0.02 s pro celkem 50 kroků. Dále byl nastaven řešič na „large strain“ pro zahrnutí nelinearit velkých deformací.

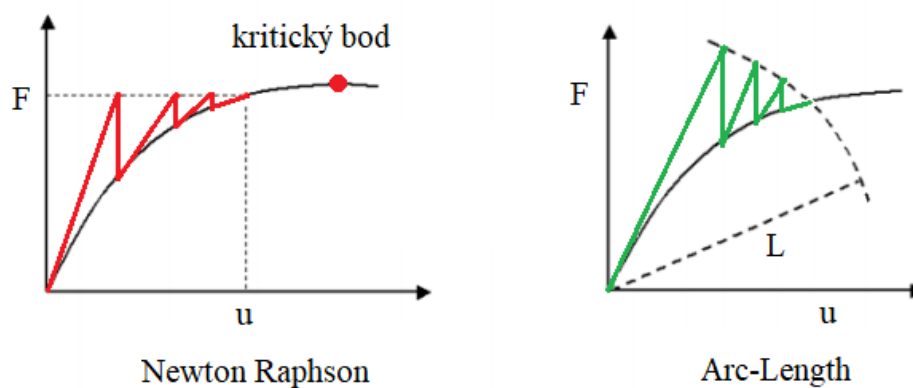


Obrázek 2.15 – Kritický stav von Misesovy příhradové konstrukce (Newton Raphson, large strain)



Obrázek 2.16 – Závislost působící síly F na posuvu v_A (Newton Raphson, large strain)

Tato metoda však nekonverguje v oblasti lokálního extrému síly, tj. když začíná nestabilita (viz obrázek 2.16). Proto je nutné zvolit jinou, vhodnější metodu. Jako vhodnou metodu lze použít metodu oblouku (arc length), která si s tímto problémem dovede poradit. Pro porovnání je princip obou metod zobrazen na obrázku 2.17. Jednotlivá čísla v grafu představují iterace výpočtu.



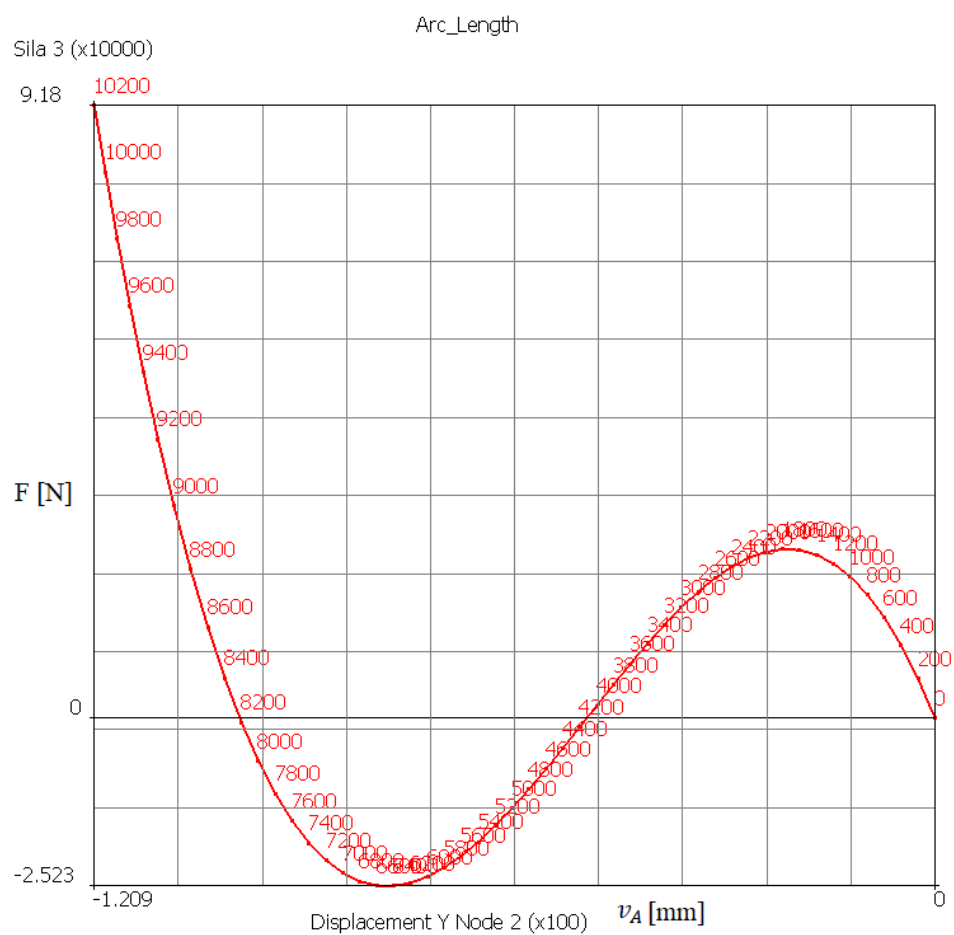
Obrázek 2.17 – Porovnání principu metody Newton Raphson a Arc-Length

Řešení pomocí Arc Length metody, large strain

K výpočtu byla využita modifikovaná Riks-Rammova metoda, které je popsána v [12]. Pro výpočet úlohy byly její parametry nastaveny následovně:

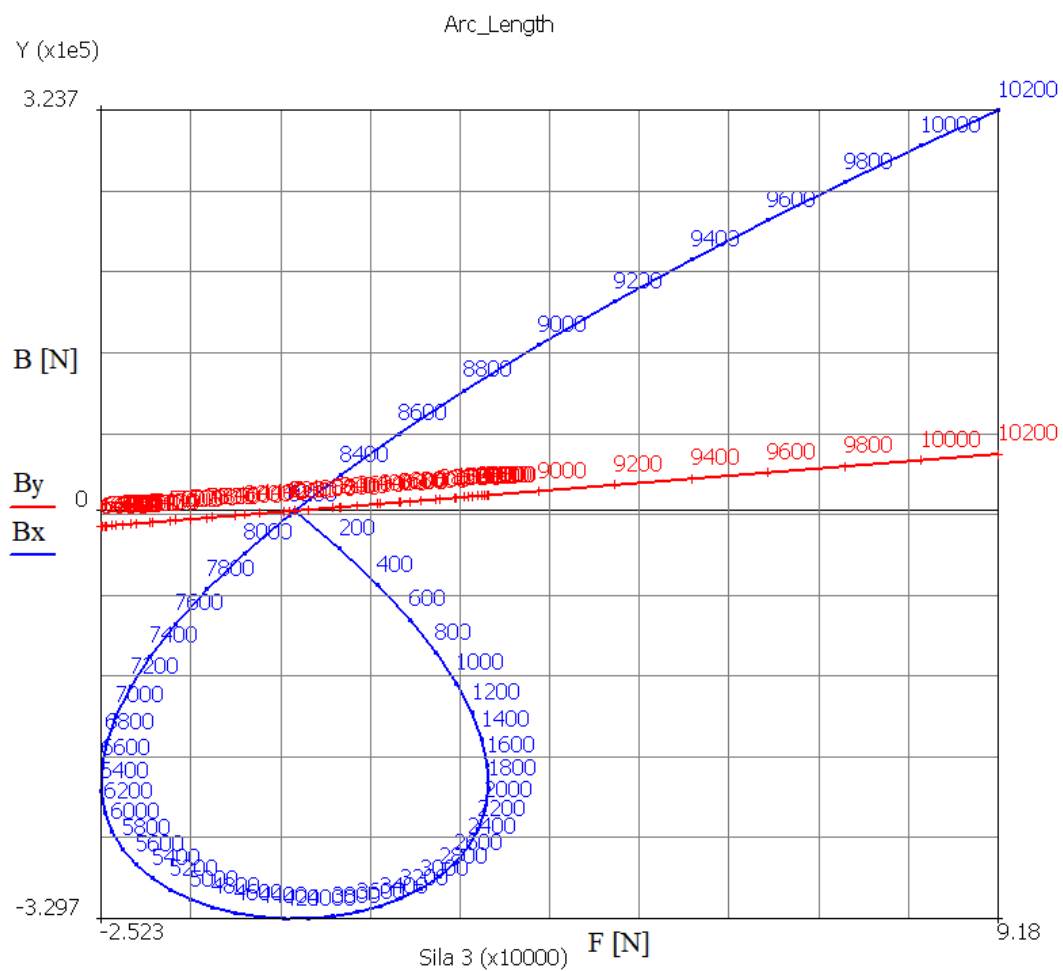
Initial Fraction	0.0001
Maximum Fraction	0.005
Maximum Increments In Loadcase	500000
Desired Recycles / Increment	5

Tyto hodnoty byly zvoleny pro přesný popis porovnání výsledků MKP s výsledky analyticko-numerického řešení. Dále byl řešič znovu nastaven na „large strain“ pro zahrnutí nelinearit velkých deformací.



Obrázek 2.18 – Závislost působící síly F na posuvu v_A (Arc-length, large strain)

Na obrázku 2.19 lze vidět závislost mezi reakcemi a působící silou F . Znovu platí, že reakce ve vertikálním směru B_y je lineárně závislá na působící síle F .

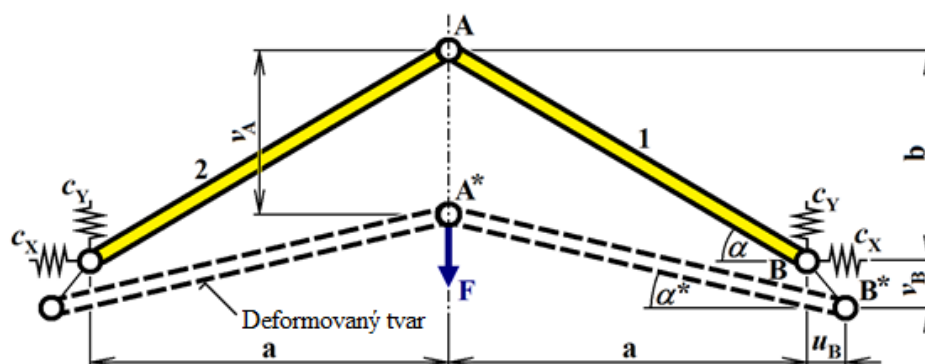


Obrázek 2.19 – Reakční síly v podporách v závislosti na síle F .

4. Analyticko-numerické řešení modifikované von Misesovy příhradové konstrukce s uvažováním pružných podpor

Popis příkladu: Rovinný nosník složený ze dvou členů je zatížen svislou silou F , viz obrázek 3.1. Materiál prutů je izotropní, lineární a elastický. Kloubová vazba je bez tření a je absolutně tuhá. Nosník je uložen na pružných podporách, tudíž bod B není pevný oproti předchozímu příkladu. Pružiny jsou lineární. Pružiny c_X působí pouze ve směru osy x , pružiny c_Y působí pouze ve směru osy y , pružiny se tedy nenatáčí kolem osy z .

Úloha s tuhými podporami (kapitola 2) je v podstatě speciální případ úlohy s pružnými podporami, kdy tuhosti $c_X = c_Y \rightarrow \infty$.



Obrázek 3.1 – Von Misesova příhradová konstrukce zatížená silou F (pružné podpory)

Zdroj: Převzato od FRYDRÝŠEK, K.

4.1. Řešení podle teorie 1. řádu

Teorie prvního řádu předpokládá lineární závislost mezi zatížením (F) a deformací (v_A), díky předpokladu, že úhel α se nemění, a proto na výslednou deformaci nebude mít tuhost pružiny c_X žádný vliv.

Tabulka 3.1 (řešení dle teorie 1. řádu)

$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
$N = N_1 = N_2 = \frac{-F}{2\sin\alpha}$
$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N}{A} = \frac{-F}{2A\sin\alpha}$
$L = \sqrt{a^2 + b^2}$

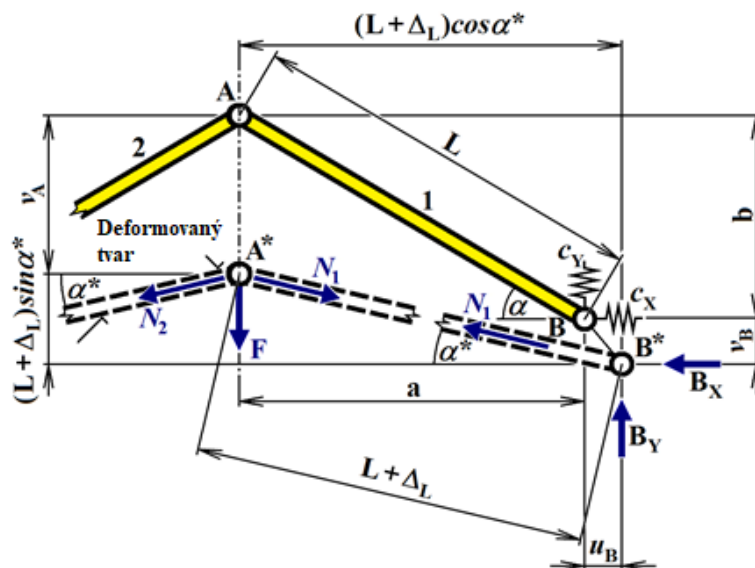
$\Delta_L = \Delta_{L1} = \Delta_{L2} = \frac{NL}{EA} = \frac{-FL}{2EA \sin\alpha}$
$v_A = \frac{\Delta_L}{\sin\alpha} + \frac{-F}{c_Y} = \frac{-FL}{2EA \sin^2\alpha} + \frac{-F}{c_Y}$
$B_X = -N \cos\alpha = \frac{F \cos\alpha}{2 \sin\alpha}$
$B_Y = \frac{F}{2}$

4.2. Řešení podle teorie 2. řádu

Obdobně jako u předchozího příkladu lze odvodit vztahy pro teorii 2. řádu:

Tabulka 3.1

$\alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{b}{a}\right)$
$N = N_1 = N_2 = \frac{-F}{2 \sin\alpha^*}$
$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N}{A} = \frac{-F}{2A \sin\alpha^*}$
$L = \sqrt{a^2 + b^2},$
$\Delta_L = \Delta_{L1} = \Delta_{L2} = \frac{NL}{EA} = \frac{-FL}{2EA \sin\alpha^*}$
$B_X = -N \cos\alpha^* = \frac{F \cos\alpha^*}{2 \sin\alpha^*}$
$B_Y = \frac{F}{2}$



Obrázek 3.2 – Von Misesova příhradová konstrukce podle teorie 2. řádu (pružné podpory)

Zdroj: Převzato od FRYDRÝŠEK, K.

Pro úplný popis závislosti posunutí na síle však musí být přidána ještě další rovnice. Pro pružnou podporu v bodě B* platí:

$$B_X = c_X u_B \Rightarrow u_B = \frac{B_X}{c_X} = \frac{-N \cos \alpha^*}{c_X} = \frac{F \cos \alpha^*}{2c_X \sin \alpha^*} \quad (3.1)$$

$$B_Y = c_Y v_B \Rightarrow v_B = \frac{B_Y}{c_Y} = \frac{F}{2c_Y} \quad (3.2)$$

Deformační podmínku pak lze odvodit z obrázku 3.2 a následně pomocí ní vyjádřit velikost síly F:

$$\begin{aligned} (L + \Delta_L) \cos \alpha^* &= a + u_B \Rightarrow \left(L - \frac{FL}{2k \sin \alpha^*} \right) \cos \alpha^* \\ &= a + \frac{F \cos \alpha^*}{2c_X \sin \alpha^*} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{F \cos \alpha^*}{2 \sin \alpha^*} \left(\frac{1}{c_X L} + \frac{1}{k} \right) &= \cos \alpha^* \Rightarrow F = \frac{2 \tan \alpha^* \left(\cos \alpha^* - \frac{a}{L} \right)}{\frac{1}{c_X L} + \frac{1}{k}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Potom lze tedy sílu F vyjádřit jako:

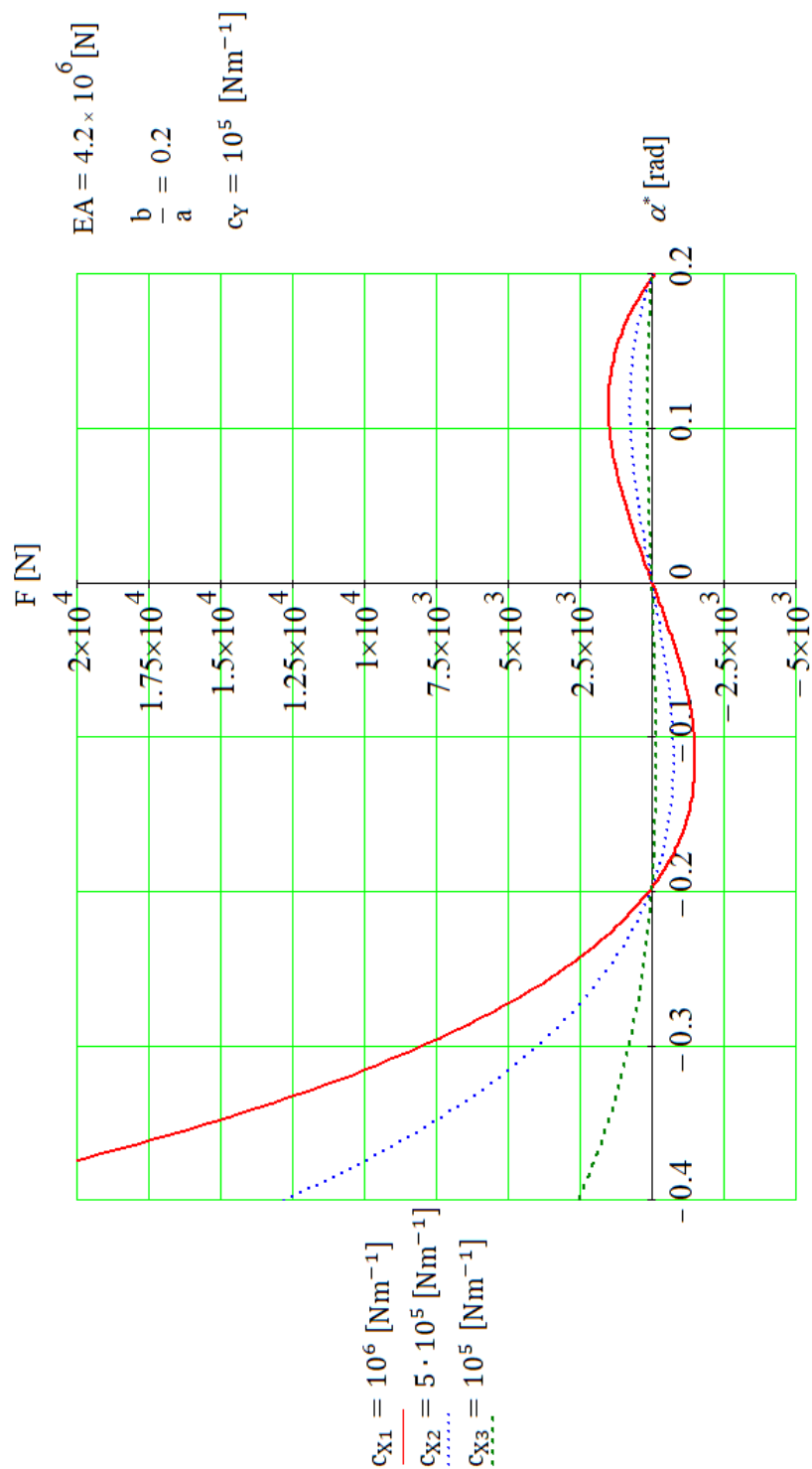
$$F = 2c_1 \tan \alpha^* \left(\cos \alpha^* - \frac{a}{L} \right) \quad (3.4)$$

kde c_1 [N] je parametr vyjadřující tuhost, který je určen jako:

$$\frac{1}{c_1} = \frac{1}{c_X L} + \frac{1}{k} \quad (3.5)$$

V případě, kdy tuhost pružin se blíží k nekonečnu, tedy $c_X \rightarrow \infty$, lze brát v úvahu podporu jako absolutně tuhou. Příklad s kloubovými vazbami je tedy speciální případ příkladu na pružných podporách. Platí tedy, že $\frac{1}{c_X L} = \frac{1}{\infty} \rightarrow 0$ a rovnice (3.4) se rovná rovnici (2.8). To je potvrzení o správnosti odvození.

Síla F tedy není závislá na tuhosti pružných podpor c_Y , ale je závislá na tuhosti pružné podpory c_X . Na obrázku 3.3 lze vidět závislost síly F na úhlu α^* podle rovnice (3.4). Pro různé tuhosti c_X je nutné mít jinou sílu F pro přechod ze stabilní do nestabilní polohy členů konstrukce. Platí, že čím větší je hodnota tuhosti c_X , tím větší sílu je potřeba vykonat pro překonání snap-through efektu.



Obrázek 3.3 – Závislost mezi působící silou F a úhlem α^* pro různé tuhosti c_X

Z grafu na obrázku 3.3 lze zjistit, že čím je tuhost podpěrných pružin menší, tím více dochází k linearizaci závislosti síly na úhlu natočení. Z důvodu změny směru působících reakcí od pružin v bodě 0 zde bude vždycky docházet také ke změně směru výsledného působení síly.

Stejným způsobem, jako u předchozího příkladu, lze ze vztahu pro sílu vyjádřit derivaci podle úhlu α^* :

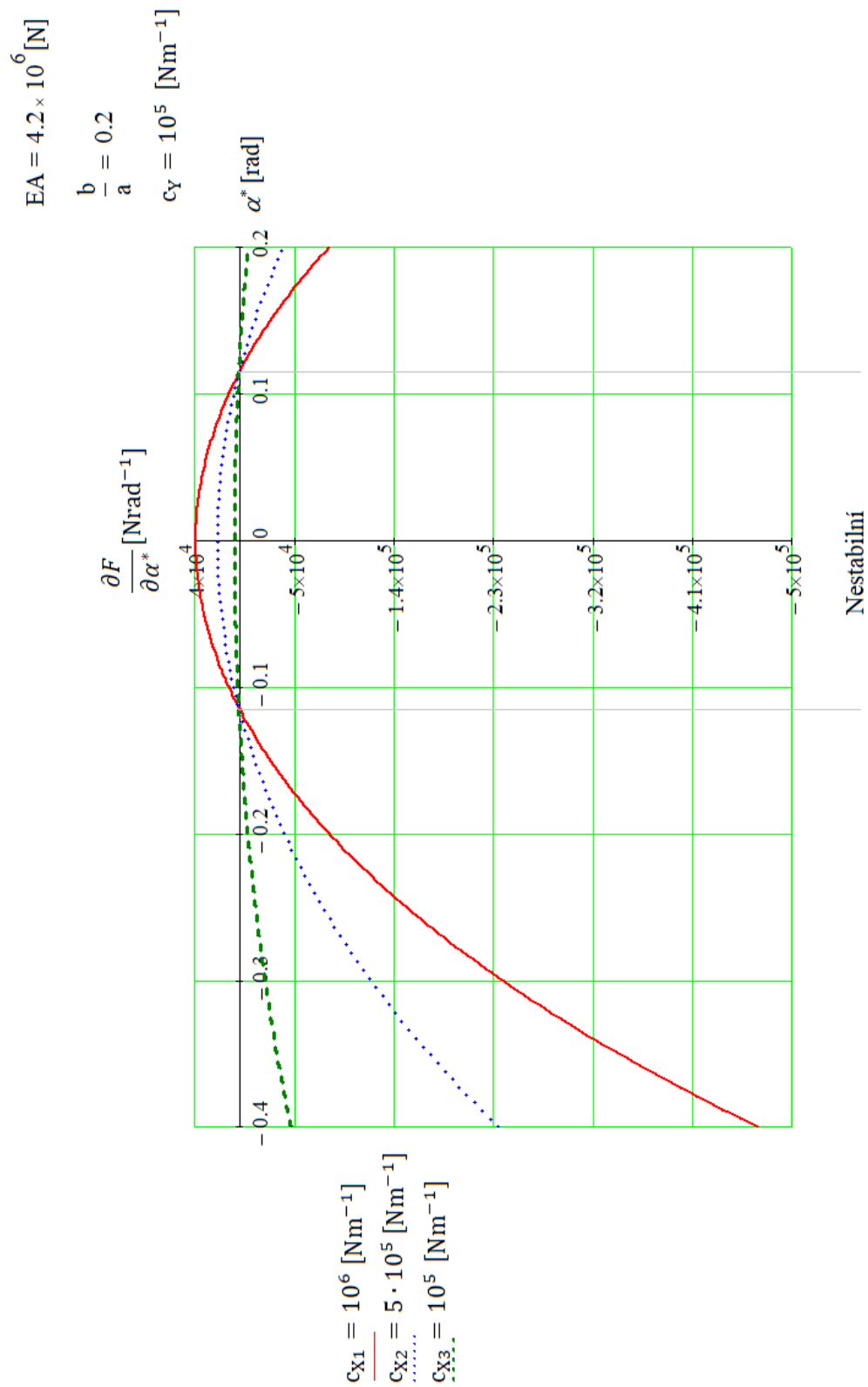
$$\frac{\partial F}{\partial \alpha^*} = 2c_1 \left(\cos \alpha^* - \frac{a}{L \cos^2 \alpha^*} \right) \quad (3.6)$$

Průběh této funkce je zobrazen na obrázku 3.4. Pro lokální extrém funkce F platí, že $\frac{\partial F}{\partial \alpha^*} = 0$, z čehož lze následně vyjádřit úhel, kdy bude zapotřebí největší síly při snap-through efektu:

$$\alpha_{EXT}^* = \pm a \cos \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}} \right) \quad (3.7)$$

Rovnice (3.7) je totožná s rovnicí (2.11), z čehož vyplývá zajímavé zjištění, že dle teorie 2. řádu úhel α_{EXT}^* závisí pouze na geometrických parametrech a , L a nezávisí na tuhosti podpor c_X a c_Y .

Obrázek 3.4 – Závislost mezi $\frac{\partial F}{\partial \alpha^*}$ a úhlem α^* pro různé tuhosti c_x



Podobně jako v předchozím příkladu lze vyjádřit sílu $F_{EXT} = F(\alpha_{EXT}^*)$, která je potřebná

k dosažení snap-through efektu, pomocí vztahů $\cos\alpha_{EXT}^* = \sqrt[3]{\frac{a}{L}}$ a $\tan\alpha_{EXT}^* = \pm \frac{\sqrt{1 - \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right)^2}}{\sqrt[3]{\frac{a}{L}}}$.

Proto:

$$F_{EXT} = \pm 2c_1 \frac{\sqrt{1 - \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right)^2} \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}} - \frac{a}{L}\right)}{\sqrt[3]{\frac{a}{L}}} \quad (3.8)$$

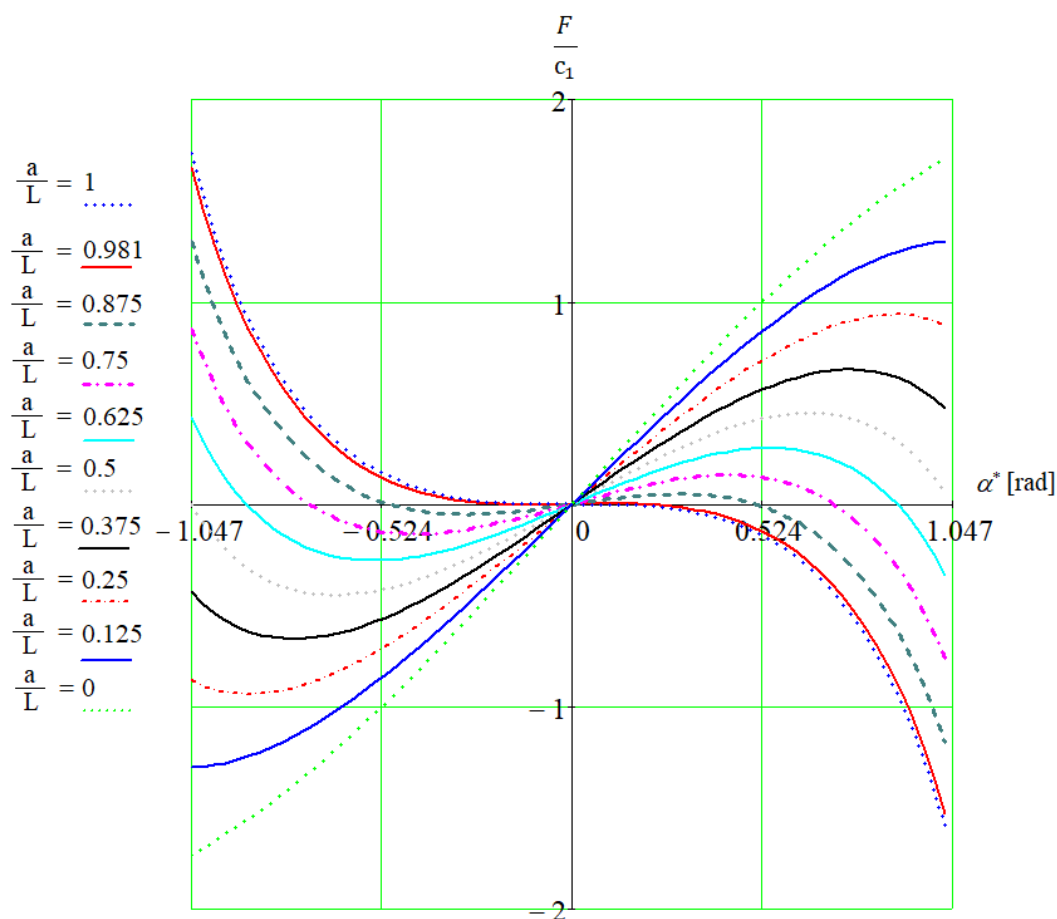
Pro zobecnění lze vyjádřit relativní sílu $\frac{F}{c_1}$ [-], $\frac{F_{EXT}}{c_1}$ [-] a relativní derivaci $\frac{1}{c_1} \frac{\partial F}{\partial \alpha^*}$ [rad⁻¹]:

$$\frac{F}{c_1} = 2 \tan\alpha^* \left(\cos\alpha^* - \frac{a}{L} \right) \quad (3.9)$$

$$\frac{F_{EXT}}{c_1} = \pm 2 \frac{\sqrt{1 - \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}}\right)^2} \left(\sqrt[3]{\frac{a}{L}} - \frac{a}{L}\right)}{\sqrt[3]{\frac{a}{L}}} \quad (3.10)$$

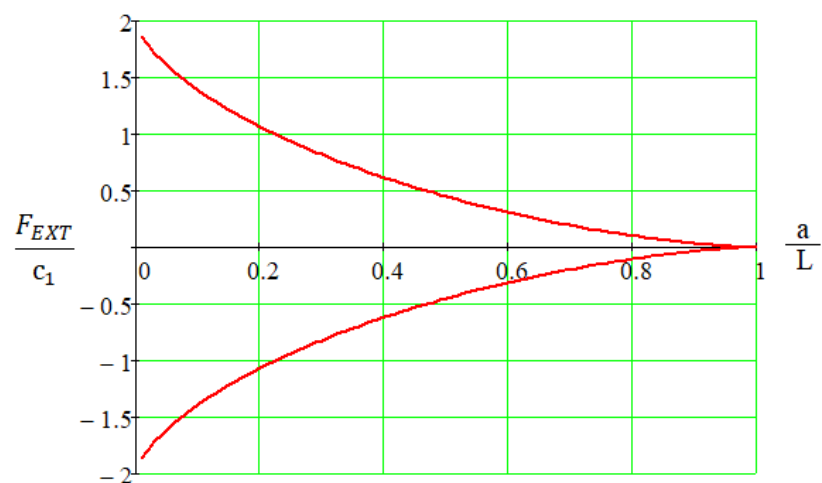
$$\frac{1}{c_1} \frac{\partial F}{\partial \alpha^*} = 2 \left(\cos\alpha^* - \frac{a}{L \cos^2\alpha^*} \right) \quad (3.11)$$

Na obrázku 3.5 je znázorněn graf závislosti $\frac{F}{c_1}$ pro různé hodnoty parametru $\frac{a}{L}$ na úhlu α^* .

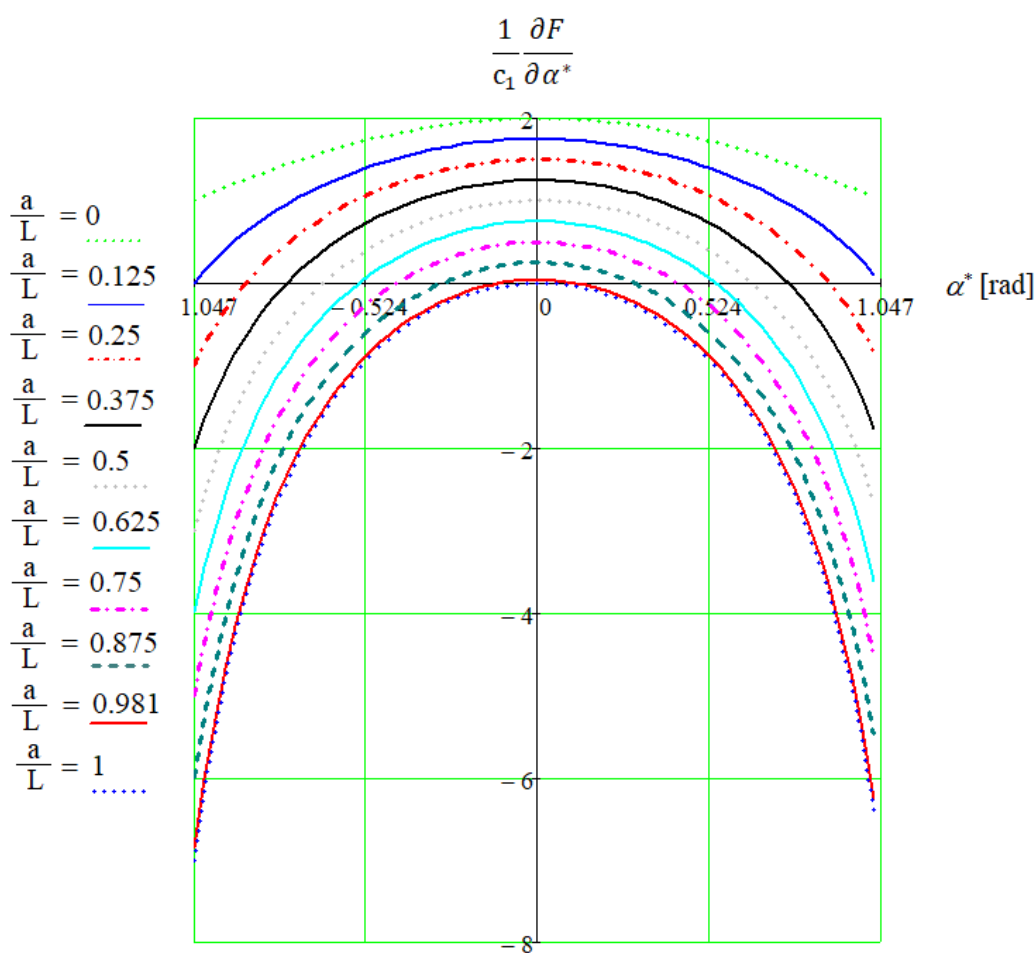


Obrázek 3.5 – závislost $\frac{F}{c_1}$ na úhlu α^* pro různé hodnoty parametru $\frac{a}{L}$

Z grafu na obrázku 3.6 lze vyčíst, že nejmenší síly F_{EXT} pro překonání snap-through efektu bude zapotřebí při stavu, kdy oba členy konstrukce budou v horizontální pozici, tedy $\frac{a}{L} = 1$. Oproti tomu nejtěžší je konstrukce tehdy, kdy parametr $\frac{a}{L} = 0$, čili když oba členy jsou ve vertikální pozici.



Obrázek 3.6 – Závislost relativní síly $\frac{F_{EXT}}{c_1}$ na parametru $\frac{a}{L}$



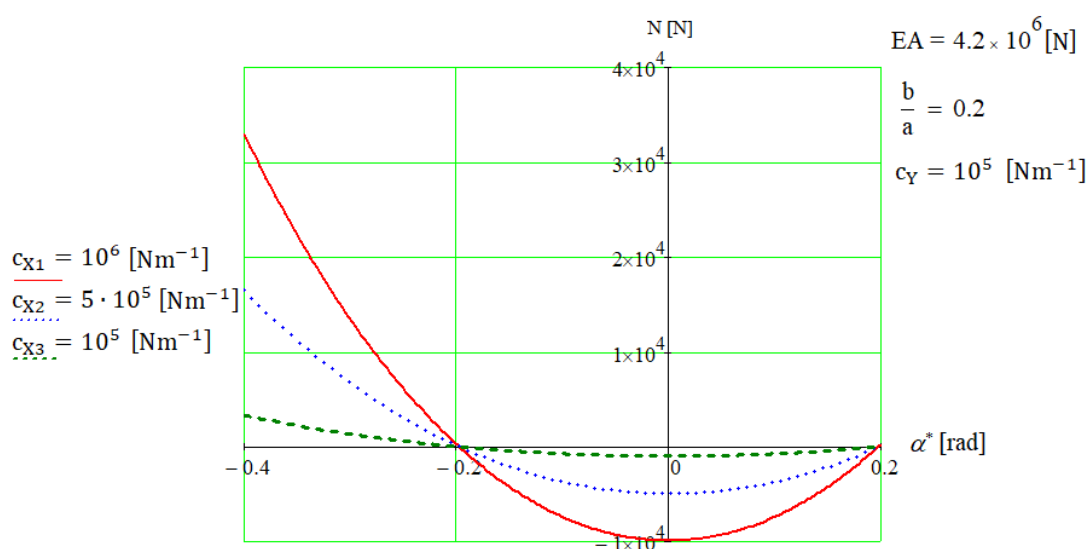
Obrázek 3.7 – Závislost derivace relativní síly $\frac{1}{c_1} \frac{\partial F}{\partial \alpha^*}$ na úhlu α^* pro různé parametry $\frac{a}{L}$

Podobně jako u předchozího příkladu lze normálovou sílu N vyjádřit jako funkci úhlu α^* :

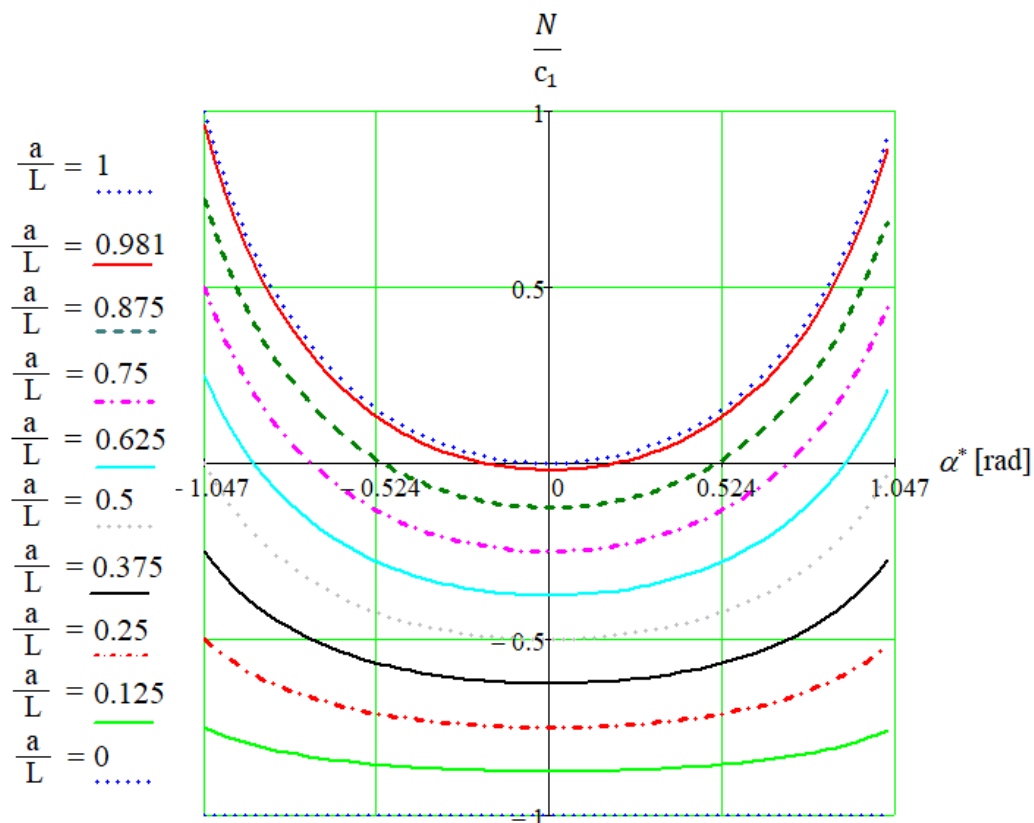
$$N = \frac{-F}{2\sin\alpha^*} = \frac{-2c_1 \tan\alpha^* \left(\cos\alpha^* - \frac{a}{L} \right)}{2\sin\alpha^*} = c_1 \left(\frac{a}{L\cos\alpha^*} - 1 \right) \quad (3.12)$$

a relativní normálová síla $\frac{N}{c_1}$ [1] jako:

$$\frac{N}{c_1} = \frac{a}{L\cos\alpha^*} - 1 \quad (3.13)$$



Obrázek 3.8 – Závislost normálové síly N na úhlu alfa pro různé tuhosti c_X



Obrázek 3.9 – Závislost relativní normálové síly $\frac{N}{c_1}$ na úhlu α^* pro různé parametry $\frac{a}{L}$

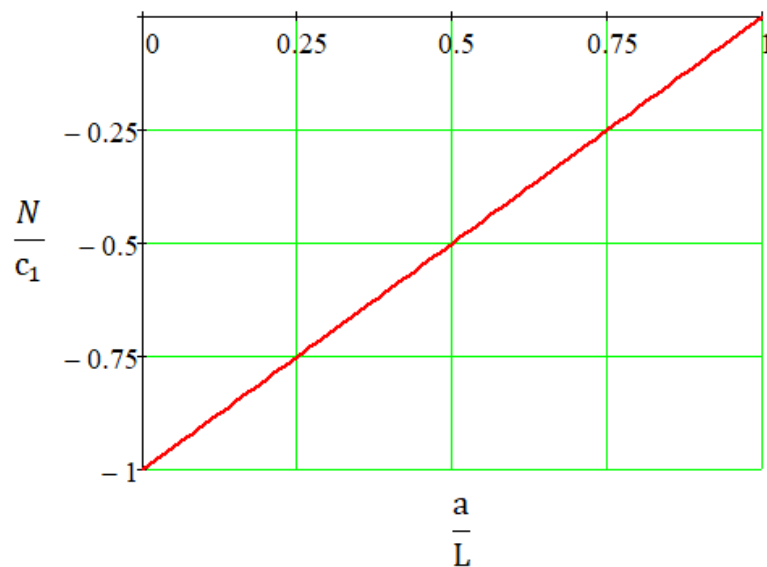
Lokální extrém normálové síly $N = N_{MIN}$ nastane tehdy, kdy $\alpha^* = 0$ rad, čili když deformované členy jsou v horizontální pozici. V této pozici jsou členy také nejvíce namáhány tlakem. Proto platí:

$$N_{MIN} = c_1 \left(\frac{a}{L \cos 0} - 1 \right) = c_1 \left(\frac{a}{L} - 1 \right) \quad (3.14)$$

a odtud pak relativní normálová síla $\frac{N_{MIN}}{c_1}$:

$$\frac{N_{MIN}}{c_1} = \left(\frac{a}{L} - 1 \right) \quad (3.15)$$

Tyto parametry jsou na sobě lineárně závislé:



Obrázek 3.10 – Závislost extrému relativní normálové síly $\frac{N}{c_1}$ na parametru

$$\frac{a}{L}$$

Rovnici (3.14) lze také vyjádřit z deformační podmínky (3.3):

$$(L + \Delta L_0) \cos 0 = a + u_{B0} \Rightarrow \left(L - \frac{N_{MIN} L}{k} \right) \cos 0 = a + \frac{-N_{MIN} \cos 0}{c_X} \Rightarrow \quad (3.16)$$

$$N_{MIN} \left(\frac{1}{c_X L} + \frac{1}{k} \right) = \frac{a}{L} - 1 \Rightarrow N_{MIN} = c_1 \left(\frac{a}{L} - 1 \right)$$

kde k je parametr vyjadřující tuhost v tahu/tlaku, pro kterou platí: $k = EA$.

Vertikální posuv v_A lze vyjádřit z geometrie na obrázku 3.2:

$$v_A = b + v_B - (L + \Delta L) \sin \alpha^* = b + \frac{F}{2c_Y} - \left(L - \frac{FL}{2k \sin \alpha^*} \right) \sin \alpha^* \quad (3.17)$$

$$v_A = b + L \left[\frac{F}{2} \left(\frac{1}{c_Y L} + \frac{1}{k} \right) - \sin \alpha^* \right] = b + L \left[\frac{F}{2c_2} - \sin \alpha^* \right]$$

kde:

$$\frac{1}{c_2} = \frac{1}{c_Y L} + \frac{1}{k} \quad (3.18)$$

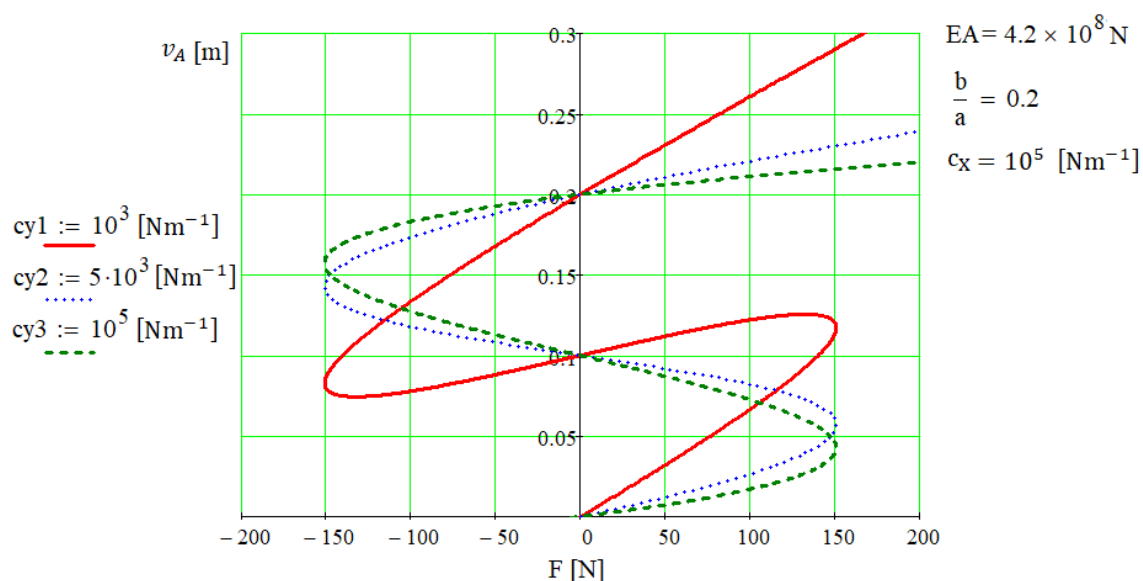
Dosazením síly F z rovnice (3.4) pak platí:

$$v_A = b + L \left[\frac{2c_1 \tan \alpha^* \left(\cos \alpha^* - \frac{a}{L} \right)}{2c_2} - \sin \alpha^* \right] = b + L \sin \alpha^* \left[c \left(1 - \frac{a}{L \cos \alpha^*} \right) - 1 \right] \quad (3.19)$$

kde c je parametr vyjadřující tuhost:

$$c = \frac{c_1}{c_2} = \frac{\frac{1}{c_Y L} + \frac{1}{k}}{\frac{1}{c_X L} + \frac{1}{k}} = \frac{(k + c_Y L)c_X}{(k + c_X L)c_Y} \quad (3.20)$$

Na obrázku 3.11 je zobrazen vliv tuhosti c_Y na vertikální posuv v_A v závislosti na působící síle F . Lze vidět, že kritická hodnota síly zůstává stejná pro všechny tuhosti, což potvrzuje tvrzení z rovnice (3.4) o tom, že síla F není závislá na tuhosti c_Y .



Obrázek 3.11 –Závislost vertikálního posuvu v_A na síle F pro různé hodnoty c_Y

4.3. Alternativní řešení pomocí principu minima potenciální energie

Podobně jako u předchozího příkladu lze dospět alternativní cestou k rovnici (3.4) pomocí principu minima potenciální energie nosníku.

$$\Pi = U_1 + U_2 - W_F = kL\varepsilon^2 - Fv_A \quad (3.21)$$

kde pro poměrné prodloužení ε platí:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{c_1}{k} \left(\frac{a}{L \cos \alpha^*} - 1 \right) \quad (3.22)$$

dále pak lze potenciální energii zapsat jako funkci parametrů α^* a F :

$$\Pi = kL \left[\frac{c_1}{k} \left(\frac{a}{L \cos \alpha^*} - 1 \right) \right]^2 - F \left(b + L \sin \alpha^* \left[c \left(1 - \frac{a}{L \cos \alpha^*} \right) - 1 \right] \right) \quad (3.23)$$

a následně pak její derivace:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha^*} &= F \left[L \cos \alpha^* \left[c \left(\frac{a}{L \cos \alpha^*} - 1 \right) + 1 \right] + \frac{a c \sin^2 \alpha^*}{\cos^2 \alpha^*} \right] + \frac{2 a c_1 \sin \alpha^* \left(\frac{a}{L \cos \alpha^*} - 1 \right)}{\cos^2 \alpha^*} \quad (3.24) \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha^*} &= 0 \end{aligned}$$

Rovnice pak platí právě tehdy, když:

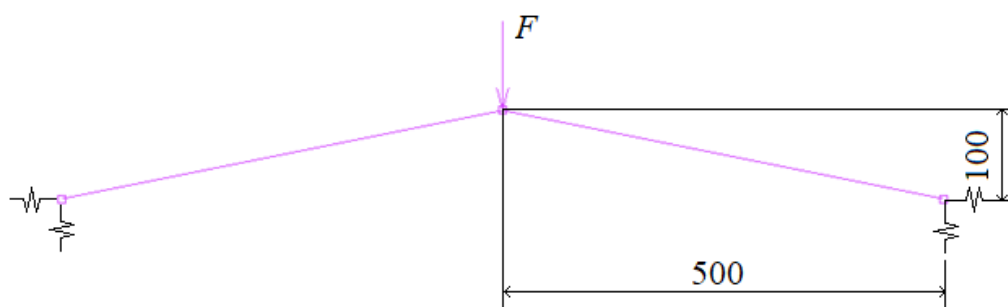
$$F = 2 c_1 \tan \alpha^* \left(\cos \alpha^* - \frac{a}{L} \right) \quad (3.25)$$

což je rovnice totožná s rovnicí (3.4) a potvrzení správnosti odvozených vztahů.

4.4. Řešení pomocí metody konečných prvků

Jak již bylo uvedeno výše, je nutné při výpočtu MKP použít metodu arc length. Uspořádání úlohy a její rozměry jsou patrné z obrázku (obrázek 3.12). Oproti předchozímu příkladu jsou zde absolutně tuhé podpory nahrazeny pružinami. Materiál zůstává stejný, jako u předchozího příkladu viz tabulka 2.1. Plocha průřezu A je 20 mm².

Úloha je řešena v sw MSC. Marc/Mentat. Použitím MKP by měl být výpočet přesnější oproti teorii 2. řádu, protože využívá teorii velkých deformací. Cílem tohoto výpočtu je také následné porovnání výsledků s teorií 2. řádu.



Obrázek 3.12 – Geometrie von Misesovy příhradové konstrukce [mm]

Okrajové podmínky a zatížení:

- zamezení posuvů ve všech uzlech v ose Z.
- Síla působící lineárně od 0 do -1000 N ve směru osy Y

Pro tuhost pružin byla zvolena hodnota 100 N/mm.

Úloha byla zkontrolována na vzpěr podle Eulerovi teorie pro výpočet kritické síly:

$$F_{Ekrit1} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} = \frac{\pi^2 2.1 \cdot 10^{11} \cdot 3.183 \cdot 10^{-11}}{0.509902^2} = 253.74 \text{ N}, \quad (3.26)$$

přičemž maximální normálovou síla v tlaku lze určit podle vztahu (3.14), proto:

$$N_{MIN} = c_1 \left(\frac{a}{L} - 1 \right) = 7091.35 \cdot \left(\frac{500}{509.9} - 1 \right) = -137.71 \text{ N} \quad (3.27)$$

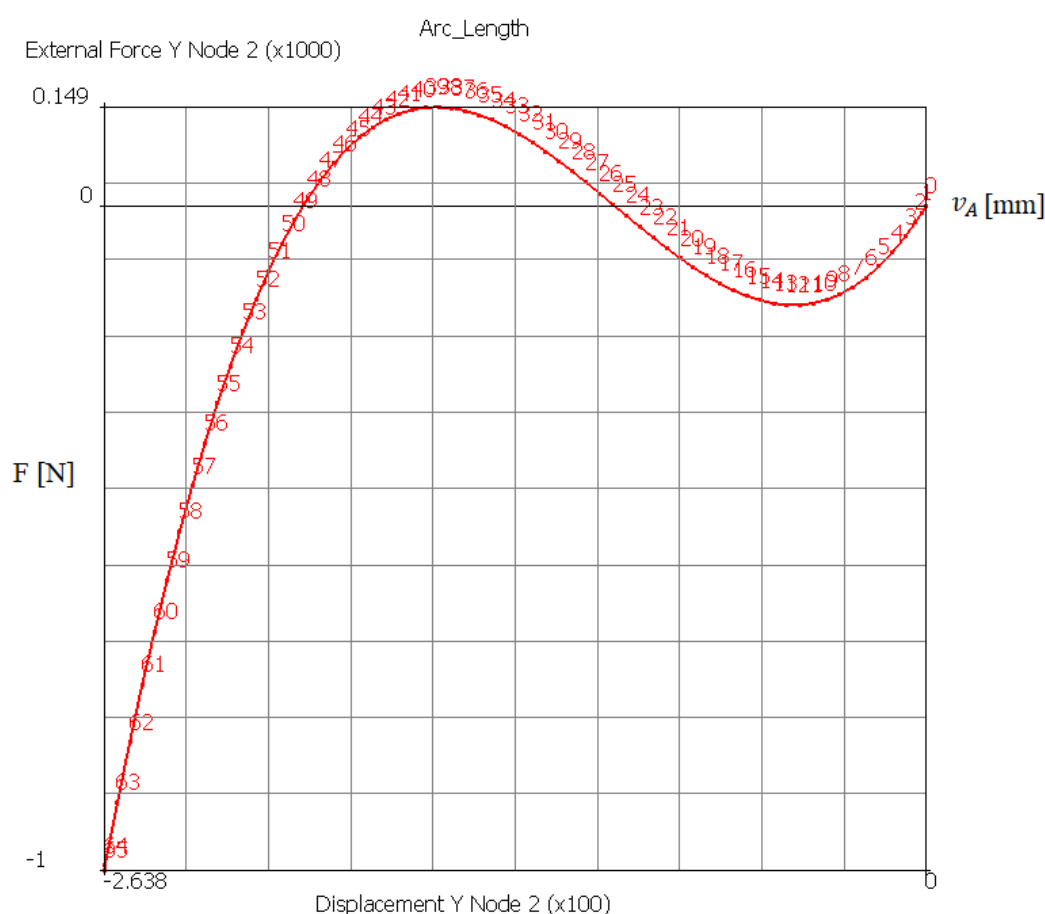
Je tedy splněna podmínka $F_{Ekrit1} > |N_{MIN}|$.

K výpočtu byla využita již zmíněná modifikovaná Riks-Rammova metoda. Pro výpočet úlohy byly její parametry nastaveny následovně:

Initial Fraction	0.01
Maximum Fraction	0.5
Maximum Increments In Loadcase	200
Desired Rerxes / Increment	5

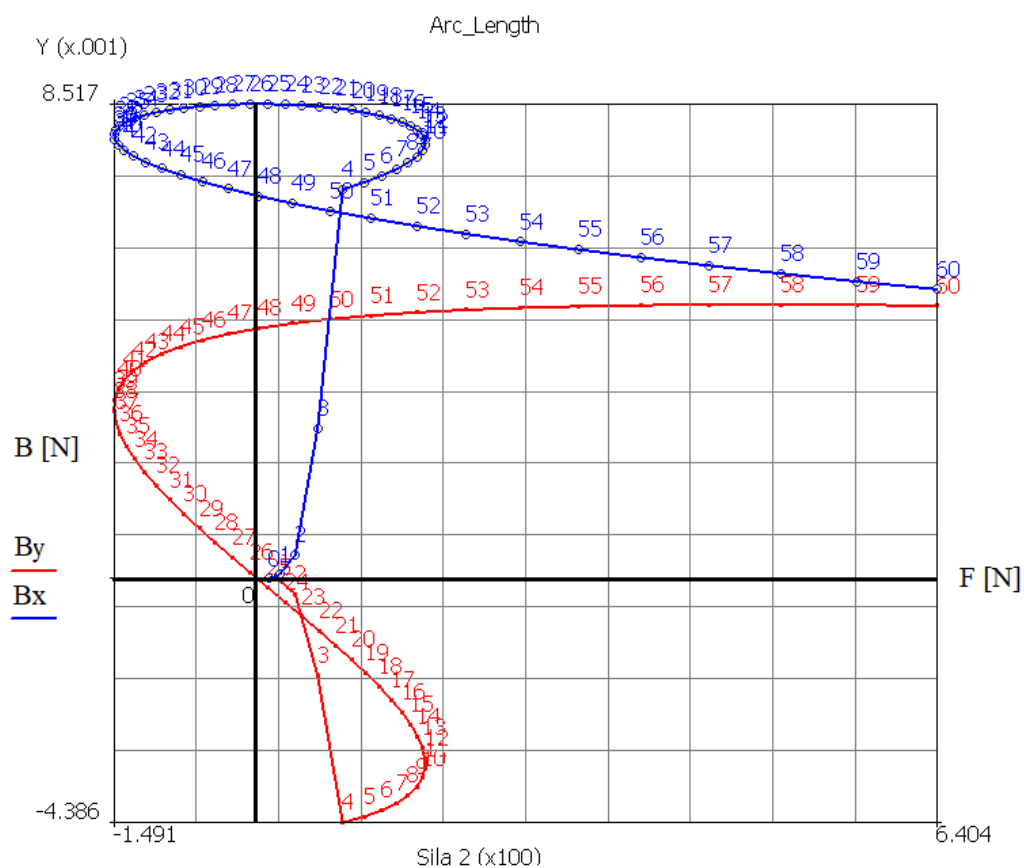
Dále byl řešič znovu nastaven na „large strain“ pro zahrnutí nelinearit velkých deformací.

Na obrázku 3.13 je zobrazena výsledná závislost mezi posuvem v bodě A ve vertikálním směru a působící silou F.



Obrázek 3.13 – Závislost mezi posuvem v_A a působící silou F (pružné podpory)

Na obrázku 3.14 je zobrazena závislost reakcí v pružných podporách B v závislosti na působící síle F. Lze vidět, že tam, kde je reakce B_Y nulová, tam je lokální extrém (maximum) reakce B_X .



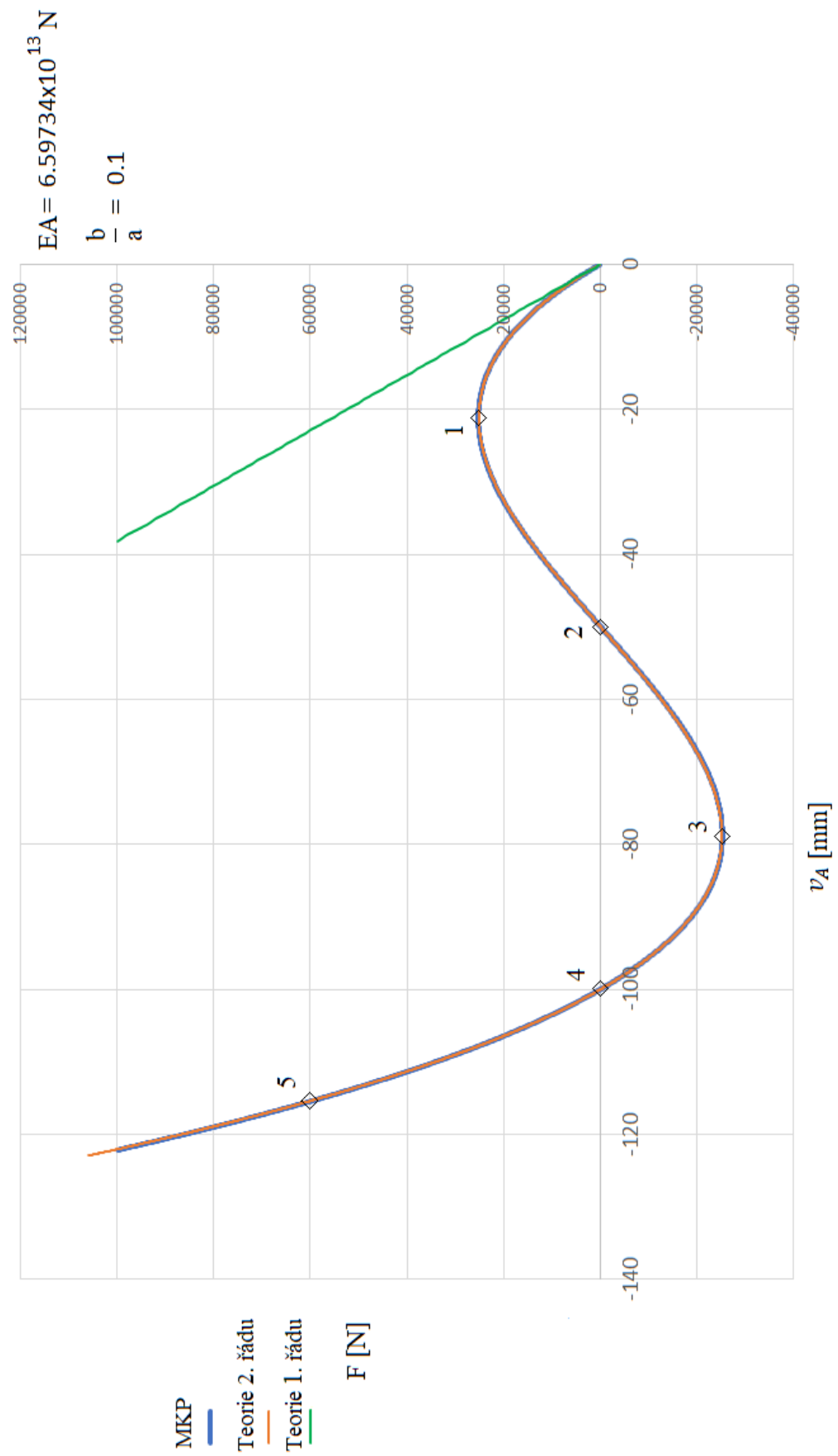
Obrázek 3.14 – Závislost mezi reakcemi v pružných podporách a silou F

5. Porovnání:

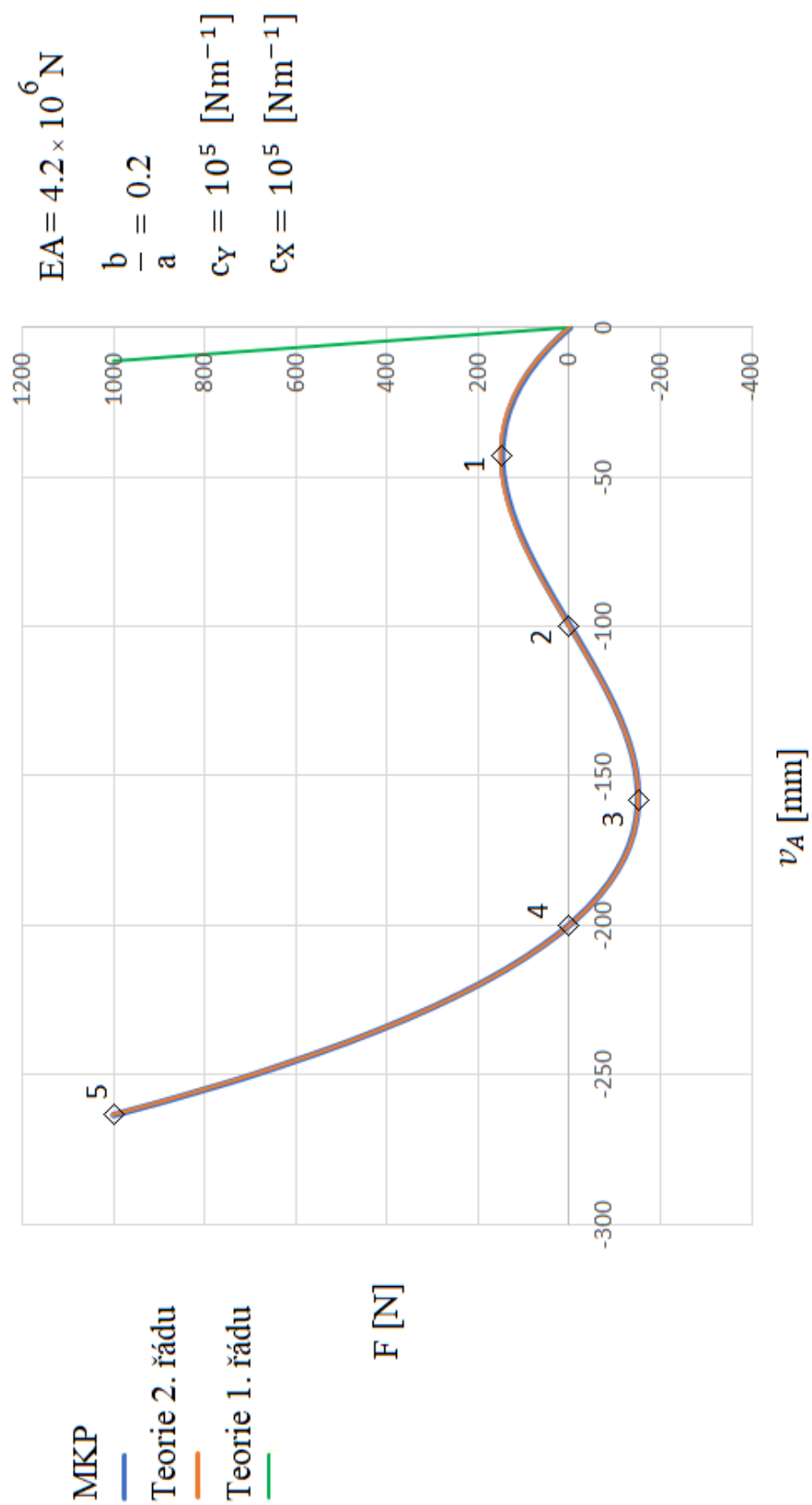
Na obrázku 4.1 a 4.2 je zobrazeno porovnání použitím teorie 1. řádu (malé deformace), teorie 2. řádu (malé deformace) a metody konečných prvků (velké deformace) na grafu závislosti mezi posuvem v_A a působící silou F . Lze vidět, že snap-through část popisuje metoda 2. řádu a MKP téměř totožně, naproti tomu teorie 1. řádu vůbec nepopisuje tento jev, a tudíž ji nelze použít. V tabulce 4.1 je provedeno porovnání vybraných hodnot pro 5 bodů, viz obrázek 4.1 a 4.2. Jako referenční hodnota je brána hodnota podle metody konečných prvků, protože vzhledem k respektování velkých deformací je přesnější, a od ní se pak odvíjí chyba v procentech podle vztahu:

$$\text{Err} = \left(\frac{F_{2R}}{F_{MKP}} - 1 \right) \cdot 100 \quad (4.1)$$

kde F_{MKP} je hodnota síly nutné pro daný posuv v_A podle metody konečných prvků a F_{2R} je hodnota síly podle teorie 2. řádu pro stejný posuv v_A .



Obrázek 4.1 – Porovnání metod (absolutně tuhé podpory)



Obrázek 4.2 – Porovnání metod (pružné podpory)

Tabulka 4.1 – Porovnání [%]

Bod	Tuhé podpory	Pružné podpory
1	0 %	-1 %
2	-18 %	-2 %
3	0 %	-1 %
4	-47 %	-1 %
5	1 %	-6 %

Je nutné zohlednit skutečnost, že chyba je uvedena jako poměr dvou hodnot. V bodech 2 a 4, kde se síla blíží nulové hodnotě, je rozdíl těchto dvou metod pouze v desítkách Newtonech. Ačkoliv je tento rozdíl malý, poměr těchto dvou hodnot může být velký. Také chyba menší než 0.005 je zde zobrazena jako 0 %. Proto je zde uvedena následující tabulka 4.2, která udává rozdíl těchto sil v Newtonech podle vztahu:

$$\text{Err2} = F_{MKP} - F_{2R} \quad (4.1)$$

Výsledné hodnoty jsou zaokrouhleny na 2 desetinná místa.

Tabulka 4.2 – Porovnání vnějších sil [N]

Bod	Tuhé podpory [N]	Pružné podpory [N]
1	$25266.9 - 25141.63 = 125.27$	$148.87 - 150.65 = -1.78$
2	$-4.99 + 4.09 = -0.9$	$-2.23 + 2.27 = 0.04$
3	$-25267.1 + 25141.62 = -125.48$	$-149.09 + 150.9 = 1.81$
4	$3.31 - 1.77 = 1.54$	$-10.61 + 10.75 = 0.14$
5	$59702.9 - 60031.3 = -328.4$	$1000 - 1062.15 = -62.15$

6. Návrh pro experiment

V programu Autodesk Inventor byl vymodelován návrh sestavy pro experimentální měření posuvu bodu konstrukce pod působící silou (tj. řešení von Misesova příhradového nosníku, který je tématem této diplomové práce). Model je navržen tak, aby šel umístit do trhacího stroje TESTOMETRIC M500-50CT (50kN), který je na Katedře aplikované mechaniky, FS VŠB-TUO (obrázek 5.1).

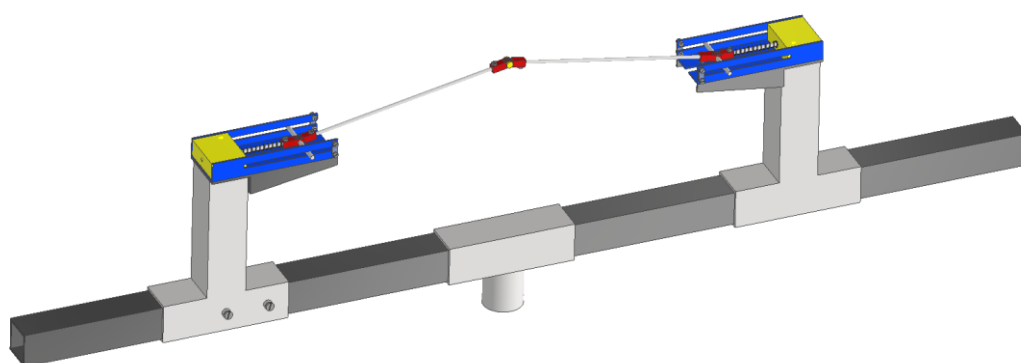
Tabulka 5.1 – parametry trhacího stroje TESTOMETRIC M500-50CT (50kN)

Range kN	50
Accuracy	+/- 0.5 % of reading down to 1/1000th of load cell capacity
Vertical Space	1180
Crosshead Travel/resolution mm	980 by 0.001
Throat mm	420
Frame stiffness kN/mm	200
Speed range mm/min	0.001 to 1000
Speed accuracy	+/- 0.1 % under stable conditions.
Crosshead guidance	Linear slides integral within column
Max force at full speed kN	50
Max speed at full lead mm/min	600
Data sampling rate	Maximum 12kHz with up to 200 Hz data frames
Overall dimensions W x D x H	762 x 505 x 1585
Weight kg	235
Electrical supply	Universal input. (de-rate max speed at 115V)
Operating temp degree C	-10 to +40
Operating humidity	+10 to +90% non-condensing
Machine Configuration	Table top, base cabinet available
Number of Columns	2
Avialbe load cells	5N, 10N, 20N, 100N, 250N, 500N, 1kN, 2.5kN, 3kN, 5kN, 10kN, 20kN, 25kN, 30kN, 50kN Maximum of four load cells up to capacity of machine.
Spigot Ø mm	30
Power kW	1

Zdroj: <https://www.labwarehouse.co.nz/assets/images/Brochures/CT%20M500%2050kN.pdf>



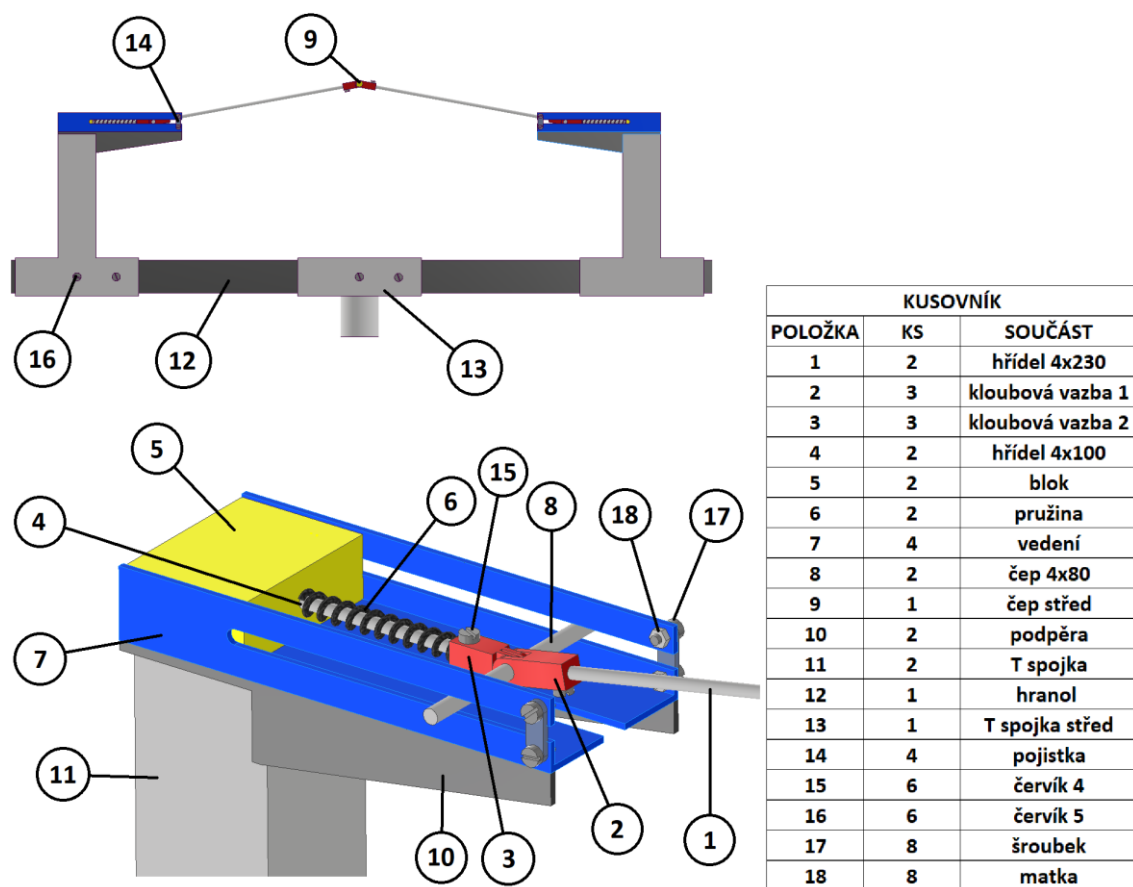
Obrázek 5.1 - trhací stroj TESTOMETRIC M500-50CT (50kN)



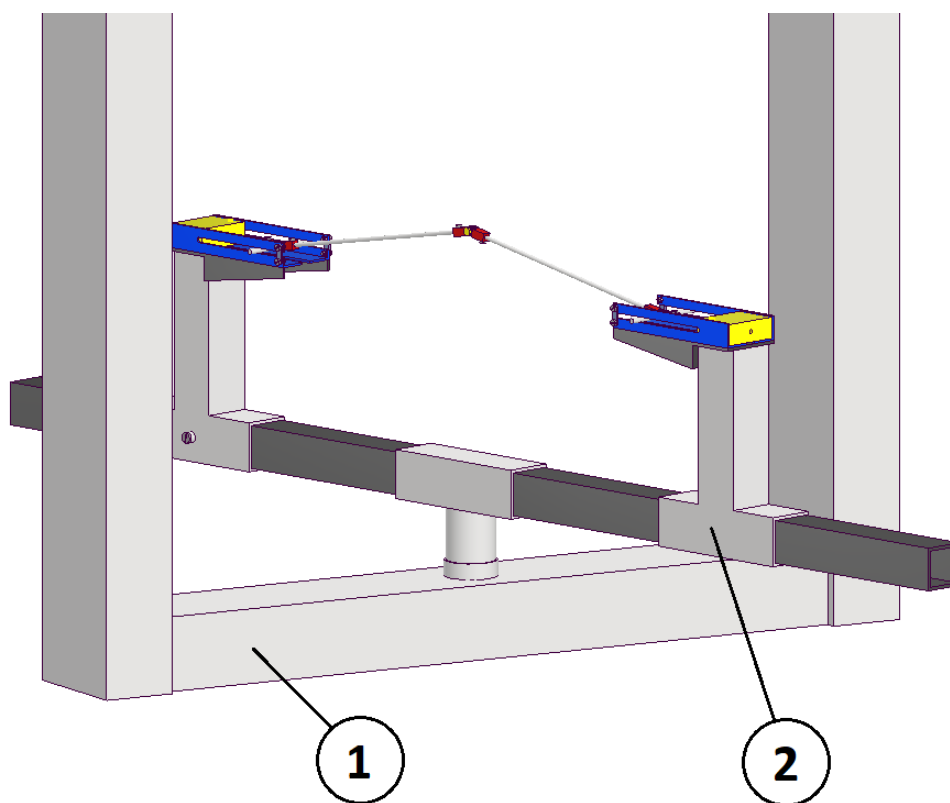
Obrázek 5.2 – Model návrhu pro experiment

Model umožňuje volbu jednotlivých pružin, případně pružiny vyjmout a simulovat tak nosník na absolutně tuhých podporách. Jednotlivé části jsou polohovatelné a lze tak nastavit

počáteční úhel α . Také je zde možnost výměny materiálu měřené konstrukce, například za dřevo, sklo, hliník, plast a jiné.



Obrázek 5.3 - Model návrhu pro experiment s názvy



1	Rám trhačího stroje TESTOMETRIC M500-50CT (50kN)
2	Model návrhu pro experiment

Obrázek 5.4 – Umístění konstrukce ve zkušebním stroji

7. Závěr

Problematika nelinearit v konstrukcích je velmi obsáhlá oblast. Tato diplomová práce se zabývá konkrétně porovnáním teorií 1. řádu, 2. řádu a metody konečných prvků v souvislosti se snap-through efektem, který spadá do oblasti geometrických nelinearit. Tento problém je podrobněji vysvětlen na jednoduchém příkladu, von Misesově nosníku s uložením na tuhých podporách a následně na modifikované úloze s pružnými podporami.

Hlavním cílem této diplomové práce bylo využít principů teorie 1. řádu, 2. řádu a metody konečných prvků pro řešení a následné porovnání těchto metod na jednoduchém příkladu, von Misesově nosníku s uložením na tuhých podporách a následně na modifikované úloze s pružnými podporami. Diplomová práce je zaměřená na problematiku snap-through efektu, který spadá do oblasti geometrických nelinearit.

V první části diplomové práce je teoretický úvod do nelinearit, se zaměřením na snap-through problém (geometrická nelinearita).

Kapitola 2 a 3 se věnuje příkladu von Misesova nosníku s absolutně tuhými podporami a následně jeho modifikace s pružnými podporami. Je zde odvození pro analyticko-numerické řešení podle teorie 2. řádu a následně také alternativní přístup pomocí principu minima potenciální energie. Je zde také uvedeno řešení pomocí teorie 1. řádu a teorie velkých deformací, kterého bylo dosaženo využitím MKP.

Ve 4. kapitole je uvedeno porovnání výše uvedených řešení. Z porovnání výsledků je patrná překvapivá vhodnost teorie 2. řádu i pro úlohy snap-through. Jednodušší teorie 2. řádu má malou chybu v porovnání se složitější metodou popisující nelinearitu velkých deformací (MKP) a velmi dobře respektuje geometrické nelinearity. Naproti tomu, primitivní a jednoduchá teorie 1. řádu tento jev vůbec nepopisuje, a tudíž ji nelze použít při úlohách se snap-through nelinearitou či vzpěrem obecně. Dostatečné přesnosti a jednoduchosti teorie 2. řádu při popisu snap-through lze proto využít v praxi na jednoduchých příkladech, s výhodou rychlosti výpočtu a jednoduchosti při úpravě rozměrů nebo materiálu.

Pro následné navázání tématu diplomové práce byl navrhnout přípravek pro experimentální měření, který by umožňoval zatěžování požadovaným způsobem a žádoucí porovnání výpočtů s experimenty. Přípravek umožňuje volbu jednotlivých pružin, případně pružiny vyjmout a simulovat tak nosník na „absolutně“ tuhých podporách. Jednotlivé části jsou polohovatelné a lze tak nastavit počáteční úhel α . Také je zde možnost výměny materiálu měřené konstrukce, například za dřevo, sklo, hliník, plast a jiné. Samotné měření by probíhalo na trhačím stroji, kde lze vidět závislost deformace a vykonané síly.

Diplomová práce je tedy rozdělena do osmi základních částí:

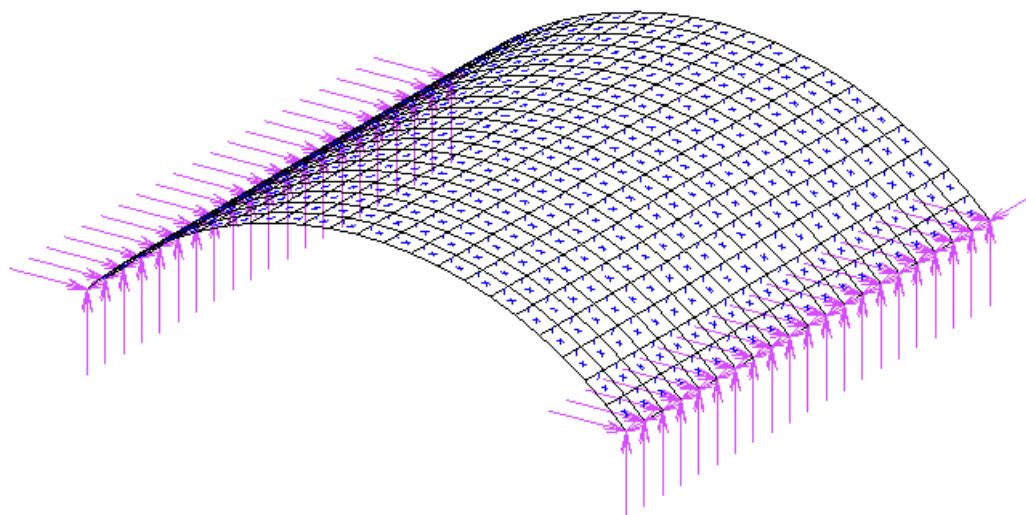
1. Teoretický úvod
2. Von Misesův nosník s absolutně tuhými podporami (analyticko-numerické řešení dle teorie 1. a 2. řádu malých deformací)
3. Von Misesův nosník s absolutně tuhými podporami (řešení pomocí MKP, teorie velkých deformací, sw MSC.MARC/MENTAT)
4. Von Misesův nosník s pružnými podporami (analyticko-numerické řešení dle teorie 2. řádu malých deformací)
5. Von Misesův nosník s pružnými podporami (řešení pomocí MKP, teorie velkých deformací, sw MSC.MARC/MENTAT)
6. Porovnání výše uvedených řešení (1 až 5)
7. Návrh konstrukce přípravku pro experimentální řešení von Misesova nosníku
8. Závěr a návrhy pro další řešení

Možnosti dalšího rozvoje tématu zkoumaného v diplomové práci

Oblast snap-through efektu je možné dále hlouběji zkoumat a zpřesnit výsledky této práce pomocí dalších možností, jako je užití nosníkové teorie (přidání efektu ohybového momentu a posouvající síly). Řešená úloha von Misesova nosníku by měla být přesnější, ale její matematický popis bude složitější a řešení náročnější. Analytické řešení může být vhodné pro prvotní odhad, který lze považovat za spolehlivý. Také je zde výhoda v rychlosti výpočtu, jakmile jsou sestaveny rovnice pro analytický výpočet.

Pro zjištění přesné odchylky je v plánu také udělat experiment a výsledné hodnoty porovnat. Je také nutné zohlednit jednoduchost úlohy, na které byla analyticko-numerické řešení použito, a proto je zde možnost rozvoje i na složitějších úlohách (jiných konstrukcích) pro zjištění správnosti výsledků, jako je například na obrázku 6.1, kde je znázorněn příklad konstrukce bez kloubu.

Jako další možnost rozvoje zkoumaného tématu je řešit úlohu stochasticky metodou Monte Carlo, například pravděpodobnostním přístupem metodou SBRA viz například [13].



Obrázek 6.1 – Příklad konstrukce bez kloubu

Postupy řešení a závěry získané v této práci je možné použít pro různé obory, ve kterých se lze setkat s problematikou snap-through. Společně s vedoucím práce připravujeme publikování získaných výsledků diplomové práce ve Scopusu či WOS (např. konference Engineering Mechanics 2020 ve Svatce) a také publikování ve výukových textech pro obor Aplikovaná mechanika či Stavební mechanika.

Poděkování

Rád bych touto cestou vyjádřil poděkování vedoucímu mé diplomové práce doc. Ing. Karlu Frydrýškovi, Ph.D. a ostatním kolegům z katedry aplikované mechaniky na VŠB-TU Ostrava za cenné rady a připomínky, poskytované při řešení diplomové práce.

8. Seznam použité literatury

- [1] DUNAISKI, P., GALISHNIKOVA, V., PAHL, P.J. Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames, ISBN 9781920109486, AFRICAN SUN MeDIA, 2009, pp.382.
- [2] FRYDRÝŠEK, K. Some Selected Tasks of Elasticity and Plasticity 4 (Basic Nonlinear Mechanics of Deformable Bodies in Examples), Department of Applied Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, VSB – Technical University of Ostrava, ISBN 978-80-248-4152-6, pp.139.
- [3] WRIGGETS, P. Nonlinear Finite Element Methods, ISBN 3540710019, 9783540710011, Springer Science & Business Media, 4. 11. 2008, pp. 560
- [4] REZAIEE-PAJAND Mohammad, ESTIRI Hossein, Computers & Structures Volume 168, Civil Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, Islamic Republic of Iran, May 2016, pp. 78-91
- [5] HILL, C.D., BLANDFORD, G.E., WANG, S.T. Post-buckling analysis of steel space trusses, J Struct Eng ASCE, 115 (4) (1989), pp. 900-919
- [6] YANG, Y.B., YANG, C.T., CHANG, T.P., CHANG, P.K. Effects of member buckling and yielding on ultimate strengths of space trusses, Eng Struct, S0141-0296(96)00032-6, 19 (2) (1997), pp. 179-191
- [7] CRISFIELD, M.A. Non-linear finite element analysis of solids and structures: Volume 2, Advanced topics, John Wiley, New York (1997)
- [8] HRINDA, G.A. Geometrically nonlinear static analysis of 3D trusses using the arc-length method, WIT Trans Modeling Simul, 46 (2007), pp. 243-252
- [9] RAMESH, G., KRISHNAMOORTHY, C.S. Inelastic post-buckling analysis of truss structures by dynamic relaxation method, Int J Numer Meth Eng, 37 (21) (1994), pp. 3633-3657
- [10] GALAMBOS, T.V., SUROVEK, A.E., Structural Stability of Steel: Concepts and Applications for Structural Engineers, ISBN 10: 0470037784 / ISBN 13: 9780470037782, John Wiley & Sons Inc, 2008, pp.373.
- [11] FRYDRÝŠEK, K., sylabus textů geometrických nelinearit. Obrázky byly převzaty se souhlasem vedoucího práce.
- [12] CRISFIELD, M.A., (1983), 'A fast incremental / iterative solution procedure that handles snap-through', Computers And Structures, 13:55–62
- [13] FRYDRÝŠEK, K. Pravděpodobnostní výpočty v mechanice 1, skriptum, Katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní, VŠB-TU Ostrava, ISBN 978-80-248-2314-0, Ostrava, 2010, pp.149